

با ایران توشه  
یک قدم جلوتر  
باش!

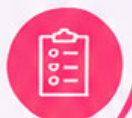


ایران توشه

توشه ای برای موفقیت



## ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی  
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی  
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی  
و شب امتحانی

همه چیز  
برای موفقیت  
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید  
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

**فایل مورد نیاز + ایران توشه**

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





# گام به گام ریاضی هشتم

## فصل ششم

عنوان فصل: مثلث

از صفحه ی ۸۹ تا صفحه ی ۱۰۸ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت ها، کارهای کلاسی، تمرین ها و پرسش های فصل مثلث آمده است.  
مباحث فصل: رابطه ی فیثاغورس، هم نهشتی، مثلث های هم نهشت، هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه، تخیلات  
یک دانش آموز در کلاس ریاضی

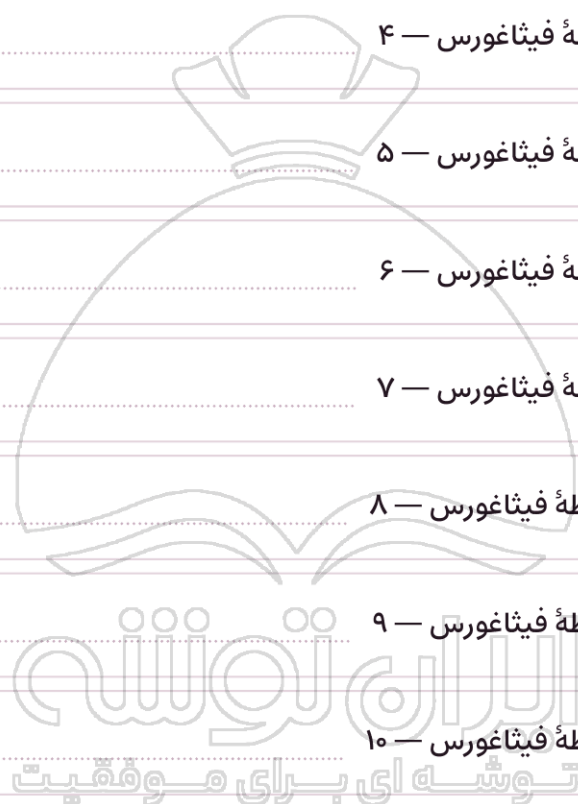
تهیه شده در ایران توشه، توشه ای برای موفقیت

[irantooshe.ir](http://irantooshe.ir)

---

# فهرست پرسش‌ها

|    |                                             |    |
|----|---------------------------------------------|----|
| ۱  | صفحه ۰۹۰ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱         | ۸  |
| ۲  | صفحه ۰۹۰ پروژه — رابطه فیثاغورس — ۲ (پروژه) | ۹  |
| ۳  | صفحه ۰۹۱ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۳         | ۹  |
| ۴  | صفحه ۰۹۱ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۴         | ۱۰ |
| ۵  | صفحه ۰۹۱ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۵         | ۱۰ |
| ۶  | صفحه ۰۹۱ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۶         | ۱۲ |
| ۷  | صفحه ۰۹۱ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۷         | ۱۲ |
| ۸  | صفحه ۰۹۲ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۸         | ۱۳ |
| ۹  | صفحه ۰۹۲ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۹         | ۱۳ |
| ۱۰ | صفحه ۰۹۲ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱۰        | ۱۴ |
| ۱۱ | صفحه ۰۹۲ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱۱        | ۱۵ |
| ۱۲ | صفحه ۰۹۳ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱۲        | ۱۵ |



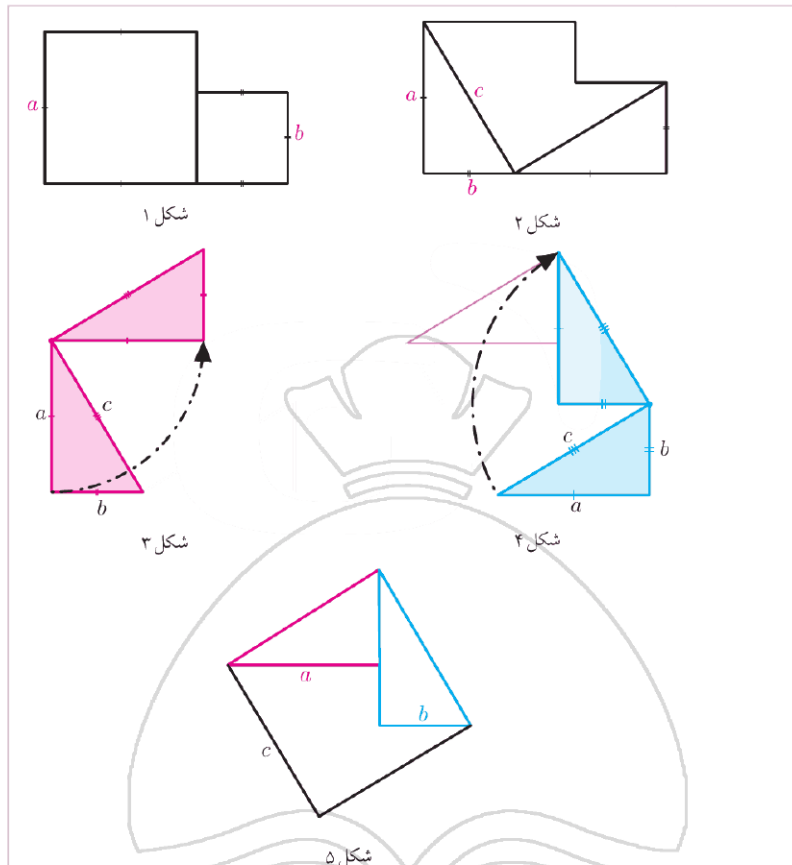
|    |                                              |    |
|----|----------------------------------------------|----|
| ۱۳ | صفحه ۰۹۳ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱۳         | ۱۶ |
| ۱۴ | صفحه ۰۹۴ مسئله — رابطه فیثاغورس — ۱۴         | ۱۸ |
| ۱۵ | صفحه ۰۹۵ پروژه — رابطه فیثاغورس — ۱۵ (پروژه) | ۱۸ |
| ۱۶ | صفحه ۰۹۵ مسئله — همنهشتی — ۱                 | ۲۰ |
| ۱۷ | صفحه ۰۹۵ مسئله — همنهشتی — ۲                 | ۲۱ |
| ۱۸ | صفحه ۰۹۵ مسئله — همنهشتی — ۳                 | ۲۱ |
| ۱۹ | صفحه ۰۹۵ مسئله — همنهشتی — ۴                 | ۲۲ |
| ۲۰ | صفحه ۰۹۶ مسئله — همنهشتی — ۵                 | ۲۲ |
| ۲۱ | صفحه ۰۹۶ مسئله — همنهشتی — ۶                 | ۲۳ |
| ۲۲ | صفحه ۰۹۶ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱         | ۲۳ |
| ۲۳ | صفحه ۰۹۶ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۲         | ۲۴ |
| ۲۴ | صفحه ۰۹۶ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۳         | ۲۵ |
| ۲۵ | صفحه ۰۹۷ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۴         | ۲۵ |
| ۲۶ | صفحه ۰۹۷ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۵         | ۲۶ |

|    |       |                                        |    |
|----|-------|----------------------------------------|----|
| ۲۶ | ..... | صفحه ۰۹۷ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۶   | ۲۷ |
| ۲۶ | ..... | صفحه ۰۹۷ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۷   | ۲۸ |
| ۲۷ | ..... | صفحه ۰۹۷ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۸   | ۲۹ |
| ۲۸ | ..... | صفحه ۰۹۸ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۹   | ۳۰ |
| ۲۸ | ..... | صفحه ۰۹۸ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۰  | ۳۱ |
| ۲۹ | ..... | صفحه ۰۹۸ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۱  | ۳۲ |
| ۲۹ | ..... | صفحه ۰۹۸ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۲  | ۳۳ |
| ۳۰ | ..... | صفحه ۰۹۹ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۳  | ۳۴ |
| ۳۱ | ..... | صفحه ۰۱۰۰ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۴ | ۳۵ |
| ۳۲ | ..... | صفحه ۰۱۰۰ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۵ | ۳۶ |
| ۳۲ | ..... | صفحه ۰۱۰۰ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۶ | ۳۷ |
| ۳۳ | ..... | صفحه ۰۱۰۰ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۷ | ۳۸ |
| ۳۴ | ..... | صفحه ۰۱۰۱ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۸ | ۳۹ |
| ۳۴ | ..... | صفحه ۰۱۰۱ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۱۹ | ۴۰ |

|    |       |                                                     |    |
|----|-------|-----------------------------------------------------|----|
| ۳۵ | ..... | صفحه ۱۰۱ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۲۰               | ۴۱ |
| ۳۶ | ..... | صفحه ۱۰۱ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۲۱               | ۴۲ |
| ۳۷ | ..... | صفحه ۱۰۲ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۲۲               | ۴۳ |
| ۳۸ | ..... | صفحه ۱۰۲ مسئله — مثلث‌های همنهشت — ۲۳               | ۴۴ |
| ۳۹ | ..... | صفحه ۱۰۲ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱  | ۴۵ |
| ۳۹ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲  | ۴۶ |
| ۴۰ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۳  | ۴۷ |
| ۴۱ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۴  | ۴۸ |
| ۴۱ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۵  | ۴۹ |
| ۴۲ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۶  | ۵۰ |
| ۴۲ | ..... | صفحه ۱۰۳ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۷  | ۵۱ |
| ۴۳ | ..... | صفحه ۱۰۴ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۸  | ۵۲ |
| ۴۳ | ..... | صفحه ۱۰۴ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۹  | ۵۳ |
| ۴۴ | ..... | صفحه ۱۰۴ مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۰ | ۵۴ |

|    |       |                                                       |    |
|----|-------|-------------------------------------------------------|----|
| ۴۴ | ..... | صفحه ۱۰۴ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۱ | ۵۵ |
| ۴۵ | ..... | صفحه ۱۰۵ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۲ | ۵۶ |
| ۴۵ | ..... | صفحه ۱۰۵ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۳ | ۵۷ |
| ۴۶ | ..... | صفحه ۱۰۵ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۴ | ۵۸ |
| ۴۶ | ..... | صفحه ۱۰۵ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۵ | ۵۹ |
| ۴۷ | ..... | صفحه ۱۰۶ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۶ | ۶۰ |
| ۴۸ | ..... | صفحه ۱۰۶ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۷ | ۶۱ |
| ۴۸ | ..... | صفحه ۱۰۶ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۸ | ۶۲ |
| ۴۸ | ..... | صفحه ۱۰۶ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۱۹ | ۶۳ |
| ۴۹ | ..... | صفحه ۱۰۶ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲۰ | ۶۴ |
| ۵۰ | ..... | صفحه ۱۰۷ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲۱ | ۶۵ |
| ۵۰ | ..... | صفحه ۱۰۷ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲۲ | ۶۶ |
| ۵۱ | ..... | صفحه ۱۰۷ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲۳ | ۶۷ |
| ۵۱ | ..... | صفحه ۱۰۷ . مسئله — همنهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه — ۲۴ | ۶۸ |

۱. شکل‌های زیر مراحل یکی از اثبات‌های قضیه فیثاغورس را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌ها، اثبات را بنویسید.



در مثلث قائم‌الزاویه، دو ضلع قائمه را  $a$  و  $b$  و وتر را  $c$  می‌نامیم. می‌خواهیم نشان دهیم  $a^2 + b^2 = c^2$ .

۱. **شکل ۱:** دو مربع به ضلع‌های  $a$  و  $b$  کنار هم قرار گرفته‌اند؛ مساحت کل شکل  $a^2 + b^2$  است.
۲. **شکل ۲:** شکل را با دو پاره‌خط به سه تکه تقسیم می‌کنیم: دو مثلث قائم‌الزاویه که ضلع‌های قائمه هر دو  $a$  و  $b$  و وترشان  $c$  است (دو مثلث همنهشت‌اند)، و یک چندضلعی میانی که دو ضلع آن برابر  $c$  است. مساحت سه تکه روی هم  $a^2 + b^2$  است.
۳. **زاویه چندضلعی میانی در نقطه برخورد دو وتر روی ضلع پایین، با دو زاویه حاده دو مثلث روی یک خط راست قرار دارد.** دو زاویه حاده یک مثلث قائم‌الزاویه مجموعاً  $90^\circ$  است؛ پس این زاویه برابر  $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  است.
۴. **شکل‌های ۳ و ۴:** مثلث سمت چپ را حول رأس بالا-چپ و مثلث سمت راست را حول رأس سمت راست خودش،  $90^\circ$  دوران می‌دهیم (پیکان‌ها). دوران، اندازه‌ها را حفظ می‌کند؛ پس دو مثلث در دو جای خالی بالای چندضلعی میانی می‌نشینند و مساحت تکه‌ها تغییر نمی‌کند.

۵. شکل ۵: شکل حاصل چهار ضلع برابر  $c$  دارد (دو وتر مثلث‌ها و دو ضلع چندضلعی میانی) و یک زاویه قائمه دارد. لوزی‌ای که یک زاویه قائمه دارد مربع است؛ پس شکل مربعی به ضلع  $c$  و مساحت  $c^2$  است.

۶. شکل ۲ و شکل ۵ از یک مجموعه تکه یکسان ساخته شده‌اند (بدون هم‌پوشانی و بدون فاصله)، پس مساحتشان برابر است:

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ و قضیه فیثاغورس ثابت می‌شود.}$$

پروژه

صفحه ۹۰

۲

۲. پروژه. روی وبگاه «[www.webmath.ir](http://www.webmath.ir)» اثبات‌های متعددی از رابطه فیثاغورس قرار داده شده است. این اثبات‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام یک از آنها مشابه یکدیگرند؟

اثبات‌ها را می‌توان به سه خانواده تقسیم کرد: (۱) **تکه‌تکه کردن و جابه‌جایی تکه‌ها** (مانند اثبات همین فصل)؛ (۲) **مساحت مربع بزرگ**: مربعی به ضلع  $a + b$  شامل چهار مثلث قائم‌الزاویه و مربعی به ضلع  $c$  است، پس  $(a+b)^2 = c^2 + 4 \times (ab/2)$  و در نتیجه  $a^2 + b^2 = c^2$ ؛ (۳) **تشابه**: ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث متشابه می‌سازد و  $a^2 = c \cdot p$  و  $b^2 = c \cdot q$ ؛ با جمع،  $a^2 + b^2 = c(p+q) = c^2$ . اثبات‌های گروه (۱) و (۲) هر دو بر پایه «مساحت» هستند و به هم شبیه‌اند؛ اثبات گروه (۳) بر پایه «تشابه» است و با آنها متفاوت است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

مسئله

صفحه ۹۱

۳

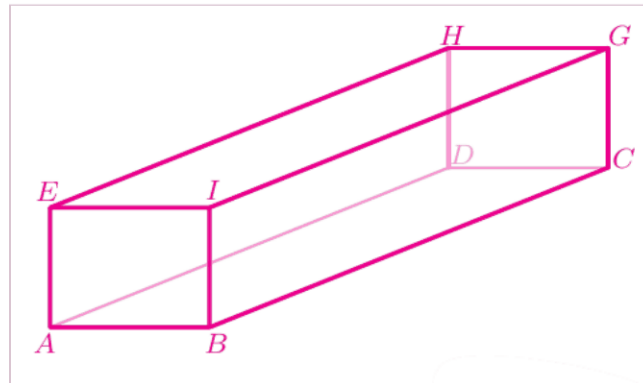
۳. شخصی ۱ کیلومتر به سمت شمال، ۲ کیلومتر به سمت شرق، ۳ کیلومتر به سمت شمال و ۴ کیلومتر به سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطه شروع چه فاصله‌ای دارد؟

حرکت‌های شمالی را پشت سرهم می‌گذاریم:  $1 + 3 = 4$  کیلومتر به شمال. حرکت‌های شرقی را هم:  $2 + 4 = 6$  کیلومتر به شرق. (جابه‌جایی‌ها بر هم عمودند و ترتیب آنها در نقطه پایان اثری ندارد.) نقطه شروع و نقطه پایان، دو سر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائمه ۴ و ۶ هستند. طبق رابطه فیثاغورس:

$$d = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow d^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$$

پاسخ: فاصله  $2\sqrt{13}$  کیلومتر است (تقریباً  $7.2$  کیلومتر).

۴. در مکعب مستطیل زیر،  $AB = 4$ ،  $AE = 3$  و  $BC = 12$ . محیط مثلث  $BED$  چقدر است؟



ابعاد جعبه:  $AB = 4$ ، ارتفاع  $AE = 3$  و  $BC = AD = 12$ . هر یال با یال‌های دیگر هم‌رأس خود عمود است؛ پس در هر مرحله می‌توانیم رابطه فیثاغورس را در یک مثلث قائم‌الزاویه به کار ببریم.

○  $BE$ : مثلث  $ABE$  در  $A$  قائمه است:  $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow BE = 5$ .

○  $BD$ : مثلث  $ABD$  در  $A$  قائمه است ( $AD = 12$ ):  $BD^2 = 16 + 144 = 160 \Rightarrow BD = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ .

○  $ED$ : مثلث  $EAD$  در  $A$  قائمه است ( $AD = 12$ ،  $AE = 3$ ):  $ED^2 = 9 + 144 = 153 \Rightarrow ED = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$ .

**پاسخ:** محیط مثلث  $BED$  برابر است با  $5 + 4\sqrt{10} + 3\sqrt{17}$  (تقریباً 30/02).

۵. الف) ثابت کنید اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند و  $m > n$ ، آنگاه  $m^2 + n^2$  طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن  $2mn$  و  $m^2 - n^2$  هستند.

ب) با استفاده از روش «الف» شش مثلث قائم‌الزاویه غیرهم‌نهشت با طول اضلاع طبیعی بسازید.

ج) اگر  $p$  و  $q$  طول ضلع‌های قائم و  $r$  طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $k$ ، اعداد  $kp$ ،  $kq$  و  $kr$  طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

د) با استفاده از روش «ج» شش مثلث غیرهم‌نهشت (متفاوت از مثلث‌های قسمت «ب») بسازید.

**الف)** چون  $m > n$  است،  $m^2 - n^2 > 0$  و  $2mn > 0$  و  $m^2 + n^2 > 0$ ؛ پس هر سه عدد طول ضلع هستند. برای اینکه مثلی با این اضلاع قائم‌الزاویه باشد (عکس قضیه فیثاغورس) باید مجموع مربع‌های دو ضلع کوچک‌تر برابر مربع ضلع بزرگ‌تر باشد:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2$$

پس مثلث با اضلاع  $m^2 - n^2$ ،  $2mn$  و  $m^2 + n^2$  قائم‌الزاویه است و وترش  $m^2 + n^2$  است (ضلع بزرگ‌ترین است).

**ب)** به ازای شش جفت  $(m, n)$ :

| $m^2 + n^2$ | $2mn$ | $m^2 - n^2$ | $n$ | $m$ |
|-------------|-------|-------------|-----|-----|
| ۵           | ۴     | ۳           | ۱   | ۲   |
| ۱۳          | ۱۲    | ۵           | ۲   | ۳   |
| ۱۷          | ۸     | ۱۵          | ۱   | ۴   |
| ۲۵          | ۲۴    | ۷           | ۳   | ۴   |
| ۲۹          | ۲۰    | ۲۱          | ۲   | ۵   |
| ۴۱          | ۴۰    | ۹           | ۴   | ۵   |

برای نمونه  $5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$  و  $17^2 = 8^2 + 15^2 = 289$ . این شش مثلث طول ضلع‌های متفاوت دارند، پس همنهشت نیستند.

**ج)** چون مثلث قائم‌الزاویه است،  $p^2 + q^2 = r^2$ . پس  $(kp)^2 + (kq)^2 = k^2p^2 + k^2q^2 = k^2(p^2 + q^2) = k^2r^2 = (kr)^2$ . طبق عکس قضیه فیثاغورس مثلثی با اضلاع  $kp$ ،  $kq$  و  $kr$  قائم‌الزاویه است.

**د)** با  $k = 2, 3, 4, 5$  روی مثلث  $(3, 4, 5)$  و  $k = 2, 3$  روی مثلث  $(5, 12, 13)$ :

| مثلث پایه     | $k$ | اضلاع      |
|---------------|-----|------------|
| $(5, 4, 3)$   | ۲   | 6, 8, 10   |
| $(5, 4, 3)$   | ۳   | 9, 12, 15  |
| $(5, 4, 3)$   | ۴   | 12, 16, 20 |
| $(5, 4, 3)$   | ۵   | 15, 20, 25 |
| $(13, 12, 5)$ | ۲   | 10, 24, 26 |
| $(13, 12, 5)$ | ۳   | 15, 36, 39 |

هر شش مثلث قائم‌الزاویه‌اند (مثلاً  $10^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ ) و با هم و با مثلث‌های قسمت «ب» همنهشت نیستند، زیرا اندازه ضلع‌هایشان فرق دارد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۶. نقطه‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. ابتدا نقطه‌ای مانند  $C$  بیابید که مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه باشد به طوری که  $\hat{C} = 90^\circ$ . سپس طول  $AB$  را پیدا کنید.

نقطه‌ها را روی صفحه مختصات می‌گذاریم:  $A(1, 1)$  و  $B(3, 5)$ . نقطه  $C$  را با همان ارتفاع  $A$  و همان طول  $B$  انتخاب می‌کنیم:  $C(3, 1)$ . در این صورت  $AC$  افقی و  $BC$  عمودی است، پس  $\angle C = 90^\circ$ .

$$AC = 3 - 1 = 2 \quad \circ$$

$$BC = 5 - 1 = 4 \quad \circ$$

طبق رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  (وتر  $AB$ ):  $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ .

**پاسخ:** مثلاً  $C(3, 1)$  و  $AB = 2\sqrt{5}$  (تقریباً  $4.47$ ). (نقطه  $C(1, 5)$  هم شرط را دارد و همین جواب را می‌دهد.)

۷. مثلث‌های  $ABC$  و  $PQR$  با مختصات رأس‌های زیر داده شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

کدام مثلث قائم‌الزاویه و کدام مثلث متساوی‌الساقین است؟

مربع فاصله دو نقطه را با رابطه فیثاغورس (اختلاف طول‌ها و اختلاف عرض‌ها) حساب می‌کنیم.

$$\text{مثلث } ABC: AB^2 = 5^2 + 1^2 = 26, AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13, BC^2 = (5-2)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13 \quad \circ$$

$$\text{مثلث } PQR: PQ^2 = 4^2 + 1^2 = 17, QR^2 = 1^2 + 2^2 = 5, PR^2 = 5^2 + 1^2 = 26 \quad \circ$$

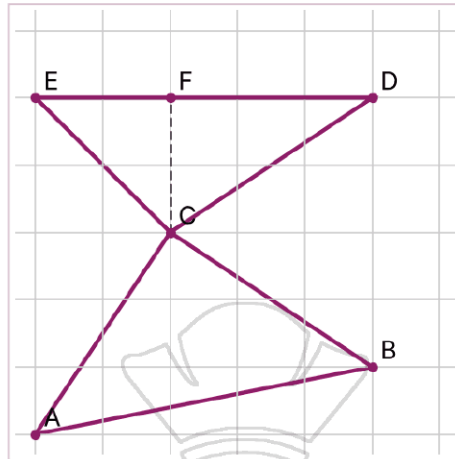
در مثلث  $ABC$ :  $AC = BC = \sqrt{13}$ ، پس متساوی‌الساقین است؛ و چون  $AB^2 = 26 = AC^2 + BC^2$ ، طبق عکس قضیه فیثاغورس در  $C$  قائمه است. پس  $ABC$  هم قائم‌الزاویه و هم متساوی‌الساقین است.

در مثلث  $PQR$  سه ضلع  $17$ ،  $5$  و  $26$  (مربع‌ها) متفاوت‌اند، پس متساوی‌الساقین نیست؛ و هیچ‌کدام از  $17 + 5 \neq 26$ ،  $17 + 26 \neq 5$  و  $5 + 26 \neq 17$  برقرار نیست، پس قائم‌الزاویه هم نیست.

**پاسخ:** مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه (در  $C$ ) و متساوی‌الساقین ( $CA = CB$ ) است؛ مثلث  $PQR$  هیچ‌کدام نیست.

**نکته:** پرسش دو مثلث متفاوت را برای دو ویژگی انتظار دارد، ولی با مختصات چاپ‌شده کتاب مثلث  $ABC$  هر دو ویژگی را دارد و  $PQR$  هیچ‌کدام را (احتمالاً مختصات یکی از نقطه‌های  $P$ ،  $Q$  یا  $R$  در کتاب با مقصود مؤلف فرق دارد).

۸. نقاط  $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ،  $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$  و  $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$  را روی کاغذ شطرنجی نشان دهید. سپس ثابت کنید زاویه‌های  $\angle CAB$  و  $\angle DEC$  برابرند.

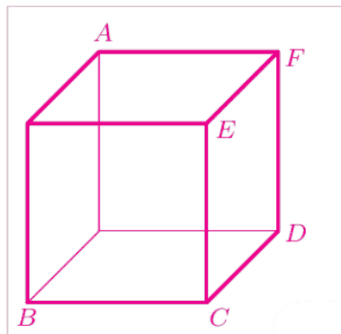


اندازه  $\angle CAB$ : از مسئله ۷ می‌دانیم  $AC^2 = BC^2 = 13$  و  $AC^2 + BC^2 = 26 = AB^2$ ؛ پس مثلث  $ABC$  در  $C$  قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. زاویه‌های روبه‌رو به دو ضلع برابر ( $\angle B$  و  $\angle A$ ) باهم برابرند و مجموعشان  $90^\circ = 180^\circ - 90^\circ$  است؛ پس  $\angle CAB = 45^\circ$ .

اندازه  $\angle DEC$ : نقطه  $F(2, 5)$  را روی  $ED$  در نظر می‌گیریم.  $EF$  افقی و  $FC$  عمودی است، پس  $\angle F = 90^\circ$ ؛ و  $EF = 2$ ،  $FC = 5 - 3 = 2$ . مثلث  $EFC$  قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و  $\angle FEC = (180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 45^\circ$ . چون  $F$  روی  $ED$  است،  $\angle DEC = \angle FEC = 45^\circ$ .

نتیجه:  $\angle DEC = \angle CAB = 45^\circ$ .

۹. در مکعب زیر، چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان ساخت به‌طوری‌که رأس‌های آن  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  یا  $F$  باشند؟ همه این مثلث‌ها را نام ببرید.



طول یال مکعب را 1 می‌گیریم. فاصله هر دو رأس از سه حالت خارج نیست: یال (1)، قطر یک وجه ( $\sqrt{2}$ )، با فیثاغورس) و قطر مکعب ( $\sqrt{3}$ ). از روی شکل:

- یال‌ها (1):  $AF, BC, CD, CE, DF, EF$
- قطرهای وجه ( $\sqrt{2}$ ):  $AB, AD, AE, BD, BE, DE, CF$
- قطرهای مکعب ( $\sqrt{3}$ ):  $AC, BF$

مثلی متساوی‌الاضلاع است که هر سه ضلعش از یک نوع باشند. با بررسی همه ۲۰ سه‌تایی ممکن، فقط وقتی هر سه ضلع قطر وجه‌اند که رأس‌ها از میان  $A, B, D, E$  باشند (هر دو رأس این چهار نقطه قطر یک وجه‌اند). مثلث‌هایی که  $C$  یا  $F$  دارند متساوی‌الاضلاع نیستند (مثلاً  $C$  با  $B$  و  $D$  فاصله 1 دارد ولی  $BD = \sqrt{2}$ ).

**پاسخ:** چهار مثلث:  $ABD, ABE, ADE$  و  $BDE$  (هر چهار ضلعشان  $\sqrt{2}$ ).

مسئله

صفحه ۹۲

۱۰

۱۰. یک کفش دوزک درون یک اتاق مکعبی شکل به طول یال ۱، حرکت می‌کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می‌کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از طریق سقف و دیوار می‌رود. اگر او کوتاه‌ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟  
توجه کنید که جواب این مسئله ۳ نیست؛ حتی  $\sqrt{2} + 1$  هم نیست!

دو کنج مقابل با مختصات  $(0,0,0)$  و  $(1,1,1)$  را در نظر بگیرید. مسیر از یک دیوار و سقف می‌گذرد. دیوار و سقف را در یک صفحه «باز» می‌کنیم (مثل باز کردن جعبه): دو مربع به ضلع 1 کنار هم یک مستطیل  $1 \times 2$  می‌سازند. کوتاه‌ترین مسیر روی مستطیل، پاره‌خطی راست است؛ این پاره‌خط وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های 1 و 2 است:

$$d = \sqrt{5} \approx 2,24 \Rightarrow d^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

پس این مسیر از مسیرهای ذکر شده کوتاه‌تر است (مسیر ۳ از سه یال و مسیر  $\sqrt{2} + 1$  از یک قطر وجه و یک یال می‌گذرد). هر مسیر دیگر روی سطح مکعب، هنگام باز کردن وجه‌ها بلندتر از  $\sqrt{5}$  می‌شود.

**پاسخ:**  $\sqrt{5}$  (تقریباً 2,24) واحد.

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه  $MOQ$ ،  $\hat{O} = 90^\circ$  نقطه  $P$  روی ضلع  $OQ$  چنان قرار دارد که  $MP = PQ$  و  $MO = OP$ . اگر  $MO = a$ ، آنگاه طول ضلع  $MQ$  را بر حسب  $a$  به دست آورید.

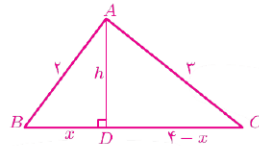
۱.  $OP = MO = a$ . در مثلث قائم‌الزاویه  $MOP$  (قائم در  $O$ ):  $MP^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow MP = a\sqrt{2}$ .
۲.  $PQ = MP = a\sqrt{2}$ ، پس  $OQ = OP + PQ = a + a\sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2})$ .
۳. در مثلث قائم‌الزاویه  $MOQ$  (وتر  $MQ$ ):  $MQ^2 = MO^2 + OQ^2 = a^2 + a^2(1 + \sqrt{2})^2 = a^2(1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2) = a^2(4 + 2\sqrt{2})$ .
- پاسخ:  $MQ = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$  (تقریباً  $2.61a$ ).

۱۲. نقطه  $E$  خارج مربع  $ABCD$  قرار دارد به گونه‌ای که مثلث  $DCE$  متساوی‌الاضلاع است. نقطه  $F$  درون مربع  $ABCD$  قرار دارد به گونه‌ای که مثلث  $BCF$  متساوی‌الاضلاع است. اگر  $AB = 1$ ، آنگاه طول  $EF$  را به دست آورید.

۱.  $CE = CD = 1$  و  $CF = CB = 1$ ، پس مثلث  $ECF$  متساوی‌الساقین با  $CE = CF = 1$  است.
۲. زاویه‌ها در  $C$ :  $\angle ECD = 60^\circ$  (مثلث  $DCE$  متساوی‌الاضلاع)، و  $\angle FCB = 60^\circ$  (مثلث  $BCF$  متساوی‌الاضلاع). چون  $F$  درون مربع است و  $\angle DCB = 90^\circ$ ، پس  $\angle DCF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .
۳.  $E$  بیرون مربع و  $F$  درون آن است؛ دو پرتوی  $CE$  و  $CF$  در دو طرف  $CD$  قرار دارند، پس  $\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ .
۴. مثلث  $ECF$  در  $C$  قائمه است و  $EF^2 = CE^2 + CF^2 = 1 + 1 = 2$ .
- پاسخ:  $EF = \sqrt{2}$ .

۱۳. بیژن و خسرو می‌خواستند مساحت مثلثی با طول اضلاع ۲، ۳ و ۴ را حساب کنند. آن دو این مسئله را به‌صورت زیر حل کردند. درباره‌ی این دو راه‌حل بحث کنید و راه‌حل نادرست را اصلاح نمایید.

راه حل بیژن:



از رابطه فیثاغورس در مثلث  $ABD$  نتیجه می‌شود:

$$h^2 = 2^2 - x^2.$$

از رابطه فیثاغورس در مثلث  $ACD$  نتیجه می‌شود:

$$h^2 = 3^2 - (4-x)^2.$$

باتوجه به دو رابطه‌ای که در بالا به‌دست آمد، داریم:

$$2^2 - x^2 = 3^2 - (4-x)^2 \Rightarrow 4 - x^2 = 9 - (16 - 4x + x^2)$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 9 - 16 + 4x - x^2$$

$$\Rightarrow 11 = 4x$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{4}.$$

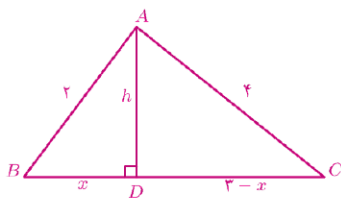
با جایگذاری مقدار  $x$  در رابطه فیثاغورس مثلث  $ABD$  داریم:

$$h^2 = 4 - \left(\frac{11}{4}\right)^2 \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

بنابراین مساحت مثلث  $ABC$  برابر است با  $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ .

ایران توئشه  
توشه‌ای برای موفقیت

راه حل خسرو:



$$\left. \begin{aligned} h^2 &= 2^2 - x^2 \\ h^2 &= 16 - (4 - x)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^2 - x^2 = 16 - (4 - x)^2$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - (16 - 8x + x^2)$$

$$\Rightarrow 4 - x^2 = 16 - 16 + 8x - x^2$$

$$\Rightarrow 4 = 8x$$

$$\Rightarrow 8x = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

پس  $h = \frac{\sqrt{15}}{2}$  و بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{2} \times 4 = \sqrt{15}.$$

**راه حل بیژن درست است.** او ضلع  $BC = 4$  را قاعده گرفته، ارتفاع  $AD$  را رسم کرده،  $BD = x$  و  $DC = 4 - x$  گذاشته و از فیثاغورس در دو مثلث  $ABD$  و  $ACD$  به  $x = 11/8$  و  $h = 3\sqrt{15}/8$  رسیده است. مساحت  $\frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{15}/8 = 3\sqrt{15}/4$ .

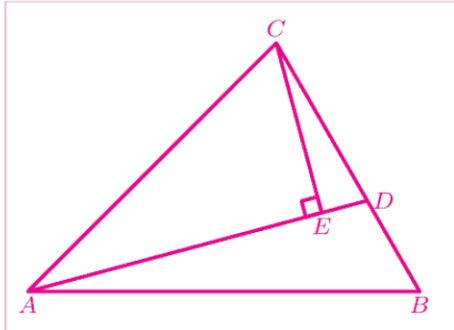
**راه حل خسرو نادرست است.** او  $AB = 2$ ،  $AC = 4$  و  $BC = 3$  گرفته و  $BD = x$  و  $DC = 3 - x$  قرار داده است. محاسبه‌های او تا  $x = -1/2$  و  $h = \sqrt{15}/2$  درست است. ولی دو اشتباه دارد:

1. در آخر مساحت را  $\frac{1}{2} \times h \times 4$  نوشته است، در حالی که  $h$  ارتفاع وارد بر ضلع  $BC = 3$  است و باید در همان ضلع ضرب شود:  $\frac{1}{2} \times 3 \times h$ . (عدد 4 طول  $AC$  است نه قاعده متناظر با  $h$ .)
2. جواب منفی  $x = -1/2$  یعنی پای ارتفاع  $D$  روی پاره  $BC$  نیست و روی امتداد  $CB$  به سمت  $B$  قرار دارد (مثلث در  $B$  منفرجه است؛  $4^2 = 16 < 13 = 2^2 + 3^2$ ). شکل او باید چنین کشیده می‌شد؛ او درباره آن توضیحی نداده است.

**راه حل اصلاح شده:** مساحت  $\frac{1}{2} \times BC \times h = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{15}/2 = 3\sqrt{15}/4$  این با جواب بیژن یکی است.

**راستی‌آزمایی با فرمول هرون** (نیم محیط  $s = 4,5$ ):  $\sqrt{(4,5 \times 2,5 \times 1,5 \times 0,5)} = \sqrt{(135/16)} = 3\sqrt{15}/4$ .

۱۴. در شکل زیر،  $AD$  بر  $CE$  عمود است. اگر  $AC = \sqrt{6}$ ،  $BC = 3$ ،  $AE = \sqrt{3}$ ،  $DE = 1$  و  $\angle ADB = 120^\circ$ ، آنگاه اندازهٔ هریک از زاویه‌های مثلث  $ABC$  را به دست آورید.



۱. مثلث  $AEC$  در  $E$  قائمه است:  $CE = \sqrt{3} = AE \Rightarrow CE^2 = AC^2 - AE^2 = 6 - 3 = 3$ . پس مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است و  $\angle ACE = \angle CAE = 45^\circ$ .
۲. مثلث  $CED$  در  $E$  قائمه است:  $CD = 2 \Rightarrow CD^2 = CE^2 + ED^2 = 3 + 1 = 4$ . چون  $\angle ADB = 120^\circ$  و  $B, D, C$  روی یک خط‌اند،  $\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ، پس  $\angle CDE = 60^\circ$  و  $\angle ECD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .
۳.  $\angle ACB = \angle ACE + \angle ECD = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ .
۴. برای  $B$ :  $BD = BC - CD = 3 - 2 = 1$ . از  $A$  عمود  $AK$  را بر خط  $BC$  رسم می‌کنیم؛ چون  $\angle ADC = 60^\circ$ ، پای عمود  $K$  روی امتداد  $BD$  از سمت  $D$  نیست بلکه روی ضلع  $DC$  می‌افتد، و در مثلث قائم‌الزاویه  $AKD$  داریم  $\angle DAK = 30^\circ$ . ضلع روبه‌رو به زاویهٔ  $30^\circ$  نصف وتر است (مثلث  $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ ):  $DK = AD/2 = (\sqrt{3} + 1)/2$  و  $AK^2 = AD^2 - DK^2 = (3/4)AD^2 \Rightarrow AK = (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3} + 1) = (3 + \sqrt{3})/2 = BD + DK = 1 + (\sqrt{3} + 1)/2 = (3 + \sqrt{3})/2 = AK$ .
۵. پس مثلث  $ABK$  قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و  $\angle B = 45^\circ$ .
۶.  $\angle A = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ .

پاسخ:  $\angle C = 75^\circ$ ،  $\angle B = 45^\circ$ ،  $\angle A = 60^\circ$ .

(راستی‌آزمایی:  $\angle BAC = \angle CAE + \angle EAB = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$  با مختصات نیز تأیید شد.)

۱۵. پروژه. عدد ۱۰ را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت:  $10 = 1^2 + 3^2$ . عدد ۷ را می‌توان به صورت تفاضل مربع دو عدد طبیعی نوشت:  $7 = 4^2 - 3^2$ . الف) چه اعدادی را می‌توان به صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت؟

## ب) چه اعدادی را می‌توان به صورت تفاضل مربع دو عدد طبیعی نوشت؟

عددهای طبیعی را  $1, 2, 3, \dots$  می‌گیریم.

ب)  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  با  $a > b \geq 1$ . دو عامل  $a - b$  و  $a + b$  هم‌زوج یا هم‌فردند (اختلافشان  $2b$  زوج است).

○ اگر هر دو فرد باشند حاصل ضرب فرد است؛ اگر هر دو زوج باشند حاصل ضرب مضرب 4 است. پس عددی مثل  $2, 6, 10, \dots$  (زوج غیرمضرب 4) هیچ‌گاه تفاضل دو مربع نیست.

○ هر عدد فرد  $2k + 1$  با  $k \geq 1$  (یعنی  $3, 5, 7, \dots$ ) برابر  $(k + 1)^2 - k^2$  است. مثلاً  $7 = 4^2 - 3^2$ .

○ هر مضرب 4 به شکل  $4k$  با  $k \geq 2$  (یعنی  $8, 12, 16, \dots$ ) برابر  $(k + 1)^2 - (k - 1)^2$  است. مثلاً  $8 = 3^2 - 1^2$ ,  $12 = 4^2 - 2^2$ .

○ اعداد 1 و 4 نمی‌توانند باشند:  $a^2 - b^2 = 1$  یا  $a^2 - b^2 = 4$  با عددهای طبیعی  $a > b \geq 1$  جواب ندارد (برای  $1 = 0^2 - 1^2$  و  $4 = 2^2 - 0^2$  باید صفر را مجاز بدانیم).

**پاسخ (ب):** همه عددهای فرد بزرگ‌تر از 1 و همه مضرب‌های 4 بزرگ‌تر از 4 (اگر صفر هم مجاز باشد، همه عددهای فرد و همه مضرب‌های 4)؛ عددهایی که باقی‌مانده تقسیمشان بر 4 برابر 2 است هرگز نمی‌توانند.

**الف)** آنچه با ابزار این کتاب می‌توان اثبات کرد: مربع هر عدد، باقی‌مانده 0 یا 1 بر 4 دارد (زوج:  $(2t)^2 = 4t^2$ ؛ فرد:  $(2t+1)^2 = 4(t^2 + t) + 1$ )؛ پس مجموع دو مربع باقی‌مانده 0، 1 یا 2 دارد و عددی به شکل  $4k + 3$  (مثل 3, 7, 11, ...) هیچ‌گاه مجموع دو مربع نیست. فهرست عددهای کمتر از 50 که مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی‌اند (با بررسی کامل):

2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50

**شرط بر پایه تجزیه:** عدد  $n$  مجموع مربعات دو عدد طبیعی است اگر و فقط اگر (۱) هر عامل اول به شکل  $4k + 3$  (مثل ۳، ۷، ۱۱) در تجزیه آن با توان زوج بیاید، و (۲)  $n$  دست‌کم یک عامل اول به شکل  $4k + 1$  (مثل ۵، ۱۳) داشته باشد یا توان ۲ در آن فرد باشد. مثلاً  $50 = 2 \times 5^2$ ،  $\checkmark$ ،  $21 = 3 \times 7$ ،  $\checkmark$ ،  $9 = 3^2$ ،  $\times$  (فقط  $3^2 + 0^2$ ). (برای مثال‌ها و آزمایش‌ها تا ۵۰۰۰ درست بود؛ اثبات این شرط فراتر از کتاب است.)

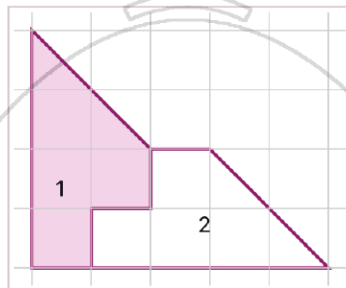
**این جواب ممکن است دقیق نباشد.**

۱. هر یک از شکل‌های زیر را به دو قسمت هم‌نهشت تقسیم کنید. در هر مورد مشخص کنید چه تبدیلی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کند.



هر شکل را روی شبکه با یک مسیر پله‌ای برش می‌دهیم (مبدأ را گوشه پایین-چپ شبکه می‌گیریم).

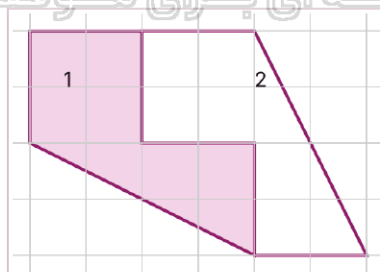
**شکل سمت چپ** (رأس‌های  $(0,4)$ ،  $(2,2)$ ،  $(2,0)$ ،  $(3,2)$ ،  $(5,0)$ ،  $(0,0)$ ؛ مساحت ۱۰): برش از  $(1,0)$  به  $(1,1)$ ، بعد  $(2,1)$  و  $(2,2)$ . هر دو قسمت مساحت ۵ دارند.



قسمت ۲ با **بازتاب** (قرینه‌سازی) نسبت به خط  $y = x$  روی قسمت ۱ تصویر می‌شود و بعد یک **انتقال** به اندازه یک واحد به راست؛ یعنی هر نقطه  $(x, y)$  به  $(y + 1, x)$  می‌رود (بازتاب و بعد انتقال، «بازتاب لغزشی»). با این نگاشت رأس‌ها دقیقاً روی رأس‌های قسمت دیگر می‌افتند.

**شکل سمت راست** (رأس‌های  $(4,0)$ ،  $(6,0)$ ،  $(4,4)$ ،  $(0,4)$ ،  $(0,2)$ ؛ مساحت ۱۶): برش از  $(2,4)$  به  $(2,2)$ ، بعد  $(4,2)$  و  $(4,0)$ . هر قسمت مساحت ۸ دارد.

توشه‌ای برای موفقیت

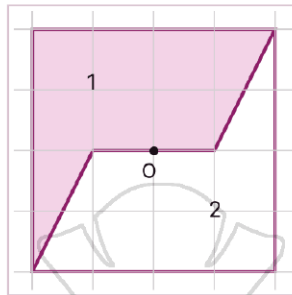


قسمت ۲ با **بازتاب** نسبت به خط  $x + y = 6$  و بعد **انتقال** دو واحد به پایین روی قسمت ۱ می‌افتد:  
 $(x, y) \mapsto (6 - y, 4 - x)$

در هر دو مورد، تبدیل‌های هم‌نهشت‌کننده (انتقال، بازتاب، دوران و ترکیب‌شان) طول و زاویه را حفظ می‌کنند؛ پس دو قسمت هم‌نهشت‌اند. (پاسخ یکتا نیست؛ این برش‌ها یک جواب درست‌اند.)

۲. یک مربع رسم کنید و آن را به دو پنج ضلعی تقسیم کنید. سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی این دو پنج ضلعی را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

مربعی به ضلع ۴ با رأس‌های  $(0,0)$ ،  $(4,0)$ ،  $(4,4)$ ،  $(0,4)$  رسم می‌کنیم و آن را با خط شکسته  $(0,0) \rightarrow (1,2) \rightarrow (4,4) \rightarrow (3,2) \rightarrow (4,4)$  (از یک گوشه به گوشه مقابل) برش می‌دهیم.



پنج ضلعی ۱:  $(0,0)$ ،  $(1,2)$ ،  $(3,2)$ ،  $(4,4)$ ،  $(0,4)$ ؛ پنج ضلعی ۲:  $(0,0)$ ،  $(4,0)$ ،  $(4,4)$ ،  $(3,2)$ ،  $(1,2)$ . مرکز مربع  $O(2,2)$  وسط خط شکسته است.

**دوران  $180^\circ$  حول  $O$**  (تقارن مرکزی) نقطه  $(x, y)$  را به  $(4-x, 4-y)$  می‌برد:  $(0,0) \mapsto (4,4)$ ،  $(1,2) \mapsto (3,2)$ ،  $(4,0) \mapsto (0,4)$  و ... پس پنج ضلعی ۱ دقیقاً روی پنج ضلعی ۲ می‌افتد. بنابراین دو پنج ضلعی هم‌نهشت‌اند و با یک دوران  $180^\circ$  به هم تبدیل می‌شوند.

۳. یک مثلث کاغذی بسازید. مثلث را با قیچی به دو مثلث تقسیم کنید. آیا می‌توانید با کنارهم قرار دادن این دو مثلث، مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم‌نهشت نباشد؟

**پاسخ: بله.** مثلث متساوی‌الساقین  $ABC$  با  $AB = AC = 5$  و  $BC = 6$  را در نظر بگیرید و آن را با ارتفاع  $AH$  ببرید.  $H$  وسط  $BC$  است،  $BH = 3$  و  $AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow AH = 4$ . دو مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت با ضلع‌های ۳، ۴، ۵ به دست می‌آید.

اگر این دو مثلث را در امتداد ضلع قائمه  $BH = 3$  (به جای ضلع  $AH = 4$ ) به هم بچسبانیم، اضلاع  $AH = 4$  دو مثلث روی یک خط راست می‌افتند (زاویه‌های  $90^\circ$  دو طرف مکمل‌اند) و مثلثی متساوی‌الساقین با اضلاع ۵، ۵، ۸ ساخته می‌شود. این مثلث با مثلث اول  $(5, 5, 6)$  هم‌نهشت نیست، چون ضلع سوم‌اش فرق دارد، ولی مساحت هر دو ۱۲ است.

۴. فرض کنید نقطه E محل برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD باشد. اگر دو مثلث ADE و BCE هم‌نهشت باشند، آنگاه:

(الف) چرا مساحت دو مثلث ABC و ABD همواره برابر هستند؟  
(ب) چرا دو مثلث ABC و ABD همواره هم‌نهشت نیستند؟

(الف) E روی AC و روی BD است. پس مثلث ABC از دو مثلث ABE و BCE و مثلث ABD از دو مثلث ABE و ADE تشکیل می‌شود:

$$S(ABC) = S(ABE) + S(BCE) \text{ و } S(ABD) = S(ABE) + S(ADE)$$

مثلث‌های هم‌نهشت مساحت برابر دارند؛ پس  $S(ABC) = S(ABD)$  و در نتیجه  $S(ABC) = S(ABD)$ .

(ب) مساحت برابر یعنی هم‌نهشتی نیست؛ برای مثال، مثلثی را که شرط مسئله در آن برقرار است ولی دو مثلث هم‌نهشت نیستند می‌سازیم: متوازی‌الاضلاع غیرمستطیل ABCD با  $A(0,0)$ ،  $B(4,0)$ ،  $C(6,2)$ ،  $D(2,2)$  با قطرهای در  $E(3,1)$  هم را نصف می‌کنند و دو مثلث ADE و CBE هم‌نهشت‌اند (سه ضلع برابر:  $AD = CB = 2\sqrt{2}$ ،  $DE = BE = \sqrt{2}$ ،  $AE = CE = \sqrt{10}$ ).

اما  $AC = \sqrt{40}$ ،  $BC = 2\sqrt{2}$ ،  $AB = 4$  و در مثلث ABC؛ و  $BD = \sqrt{8}$ ،  $AD = 2\sqrt{2}$ ،  $AB = 4$  در مثلث ABD. چون  $AC \neq BD$  ( $\sqrt{40} \neq \sqrt{8}$ )، سه ضلع این دو مثلث یکی نیست و هم‌نهشت نیستند (مثلث ABD متساوی‌الساقین است، ABC نه).

پس از هم‌نهشتی ADE و BCE فقط می‌توان برابری مساحت ABC و ABD را نتیجه گرفت، نه هم‌نهشتی‌شان را.

۵. آیا می‌توان مثلثی را که طول سه ضلعش متفاوت‌اند، به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم کرد؟

پاسخ: خیر.

۱. برای تقسیم یک مثلث به دو مثلث، باید یک رأس را به نقطه‌ای مانند D روی ضلع مقابل وصل کنیم؛ (برشی که دو ضلع را در نقطه‌هایی غیر از رأس قطع کند، یک مثلث و یک چهارضلعی می‌سازد).
۲. فرض کنیم مثلث ABC با سه ضلع متفاوت را با AD (روی BC) به دو مثلث ABD و ACD تقسیم کرده‌ایم. ضلع AD مشترک است.
۳. اگر این دو مثلث هم‌نهشت باشند، سه ضلع‌های‌شان یک‌به‌یک برابرند:  $\{AB, BD, AD\} = \{AC, CD, AD\}$ . با حذف AD از دو طرف:  $\{AB, BD\} = \{AC, CD\}$ .
۴.  $AB \neq AC$  (ضلع‌های مثلث متفاوت‌اند)؛ پس باید  $AB = CD$  و  $BD = AC$  باشد.

۵. ○ آنگاه  $BC = BD + CD = AC + AB$ ، که با نابرابری مثلث ( $BC < AB + AC$ ) در تناقض است.  
پس چنین تقسیمی ممکن نیست.

مسئله

صفحه ۹۶

۲۱

۶. اگر قطر  $BD$  در چهارضلعی  $ABCD$ ، آن را به دو مثلث هم نهشت تقسیم کند، آنگاه کدام یک از عبارتهای زیر همواره درست است؟

الف)  $\angle BAD = \angle BCD$  ب)  $AB = CD$  ج)  $\angle ABD = \angle CDB$  د)  $AB = BC$

دو مثلث  $ABD$  و  $CBD$  ضلع  $BD$  را مشترک دارند. اگر هم نهشت باشند، با حذف  $BD$  مجموعه ضلعهای دیگرشان برابر است:  $\{AB, AD\} = \{CB, CD\}$ . دو حالت داریم:

○ **حالت ۱:**  $AB = CB$  و  $AD = CD$  (بادبادک). آنگاه دو مثلث به حالت (ض ض ض) هم نهشت اند و  $\angle BAD = \angle BCD$ .

○ **حالت ۲:**  $AB = CD$  و  $AD = CB$  (مثل متوازی الاضلاع). آنگاه باز هم سه ضلعها یک به یک برابرند ( $BD$  مشترک) و  $\angle BAD = \angle BCD$  (زاویه های بین دو ضلع برابر).

پس **الف)** در هر دو حالت درست است.

○ (ب) نادرست: بادبادک  $B(0,0), D(4,0), A(1,2), C(1,-2)$  و  $AB = \sqrt{5} = CB$  و  $CD = \sqrt{13}$  پس  $AB \neq CD$ .

○ (ج) نادرست: در همین بادبادک  $\angle ABD$  و  $\angle CDB$  برابر نیستند (مماس های آنها ۲ و  $2/3$  است).

○ (د) نادرست: متوازی الاضلاع  $A(0,0), B(3,0), C(5,2), D(2,2)$  که لوزی نیست:  $AB = 3$  و  $BC = 2\sqrt{2}$ ؛ دو مثلث  $ABD$  و  $CDB$  هم نهشت اند ولی  $AB \neq BC$ .

پاسخ: فقط الف).

ایران توانمند

توشه ای برای موفقیت

مسئله

صفحه ۹۶

۲۲

۱. در هر یک از شکل های زیر، حداقل دو جفت مثلث هم نهشت وجود دارد. آن مثلث ها را نام ببرید و اجزای برابر آنها را مشخص کنید.



**شکل سمت چپ:** با شبکه:  $A(0,0), E(2,0), D(6,0), C(8,0), B(4,5)$ . با فیثاغورس:  $AB^2 = 16 + 25 = 41 = CB^2$  و  $BE^2 = 4 + 25 = 29 = BD^2$  همچنین  $AE = DC = 2$ .

○  $\triangle ABE \cong \triangle CBD$  (ض ض ض):  $AE = CD, BE = BD, AB = CB$  پس  $\angle A = \angle C, \angle ABE = \angle CBD, \angle AEB = \angle CDB$ .

○  $\triangle ABD \cong \triangle CBE$  (ض ض ض):  $AD = CE = 6, BD = BE, AB = CB$  پس  $\angle A = \angle C, \angle ABD = \angle CBE, \angle ADB = \angle CEB$ .

**شکل سمت راست:** با شبکه:  $B(0,0), D(10,0), A(5,5), E(3,3), C(7,3)$ .  $AB^2 = AD^2 = 50$  و  $AE^2 = AC^2 = 8$  و  $EB^2 = CD^2 = 18$  زاویه های  $B$  و  $D$  هر دو  $45^\circ$  اند.

○  $\triangle ABC \cong \triangle ADE$  (ض ض ض):  $AC = AE, AB = AD$  و زاویه  $A$  مشترک است؛ پس  $\angle B = \angle D, BC = DE, \angle ACB = \angle AED$ .

○  $\triangle EBD \cong \triangle CDB$  (ض ض ض):  $BD$  مشترک،  $EB = CD$  و  $\angle EBD = \angle CDB = 45^\circ$ ؛ پس  $ED = CB, \angle BED = \angle EDB = \angle CBD, \angle DCB$ .

مسئله

صفحه ۹۶

۲۳

**۲. در شکل زیر  $NL = KM$  و  $\angle KML = \angle NLM$ . ثابت کنید دو مثلث  $KML$  و  $NLM$  هم نهشت اند و اجزای متناظر آنها را بنویسید.**



دو مثلث  $KML$  و  $NLM$  را مقایسه می کنیم:

○  $KM = NL$  (فرض)

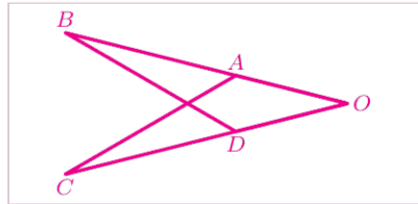
○  $\angle KML = \angle NLM$  (فرض)

○  $ML = LM$  (ضلع مشترک)

زاویه  $M$  بین ضلع های  $KM$  و  $ML$  است و زاویه  $L$  بین ضلع های  $NL$  و  $LM$  است؛ پس طبق (ض ض ض):  $\triangle KML \cong \triangle NLM$  با تناظر  $L \leftrightarrow M, M \leftrightarrow L, K \leftrightarrow N$ .

اجزای متناظر:  $KL = NM, ML = LM, KM = NL, \angle KLM = \angle NML, \angle K = \angle N, \angle KML = \angle NLM$ .

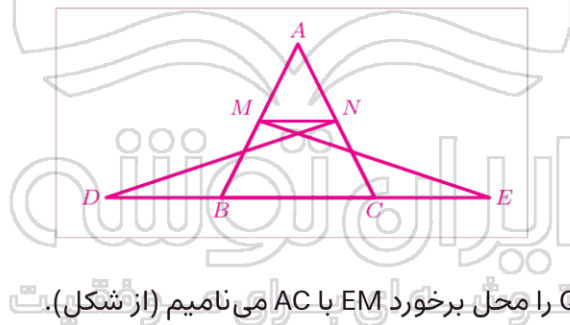
۳. در شکل زیر،  $AB = CD$  و  $AO = DO$ . ثابت کنید  $AC = BD$ .



از شکل:  $B, A, O$  روی یک خط‌اند و  $C, D, O$  روی یک خط.

۱.  $BO = BA + AO = CD + DO = CO$  ○
۲. مثلث‌های  $OAC$  و  $ODB$ :  $OA = OD$  (فرض)،  $OC = OB$  (مرحله ۱) و  $\angle O$  مشترک است (زاویه  $O$  بین  $OA, OC$  همان زاویه بین  $OB, OD$  است).
۳. طبق (ض‌ض):  $\triangle OAC \cong \triangle ODB$  و در نتیجه  $AC = DB$ . ○

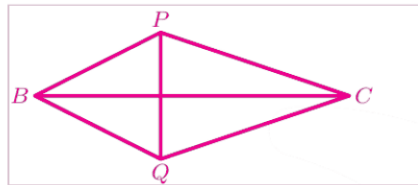
۴. در شکل زیر،  $\angle ABC = \angle ACB$ ،  $BD = CE$  و  $\angle NDB = \angle MEC$ . ثابت کنید مثلث  $AMN$  متساوی‌الساقین است.



- P را محل برخورد  $DN$  با  $AB$  و Q را محل برخورد  $EM$  با  $AC$  می‌نامیم (از شکل).
۱.  $\angle DBP = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB = \angle ECQ$  و  $AB = AC \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$  ○
  ۲. مثلث‌های  $DBP$  و  $ECQ$ :  $\angle D = \angle E$  (فرض)،  $BD = CE$  (فرض)،  $\angle DBP = \angle ECQ$ . طبق (ض‌ض):  $\triangle DBP \cong \triangle ECQ$  و  $BP = CQ \Rightarrow \triangle DPB \cong \triangle EQC$  ○
  ۳.  $AP = AB - BP = AC - CQ = AQ$  ○
  ۴.  $\angle APN = \angle DPB$  و  $\angle AQM = \angle EQC$  (متقابل به رأس)، پس  $\angle APN = \angle AQM$  ○
  ۵. مثلث‌های  $APN$  و  $AQM$ :  $\angle A$  مشترک،  $AP = AQ$ ،  $\angle APN = \angle AQM$ . طبق (ض‌ض):  $\triangle APN \cong \triangle AQM$  ○
- $AN = AM \Rightarrow$

پس مثلث  $AMN$  متساوی‌الساقین است.

۵. در شکل زیر،  $BP = BQ$  و  $CP = CQ$  ثابت کنید  $PQ$  بر  $BC$  عمود است.



O را محل برخورد  $PQ$  و  $BC$  می‌نامیم.

۱. مثلث‌های  $BPC$  و  $BQC$ :  $BP = BQ$ ,  $CP = CQ$ ,  $BC$  مشترک  $\Rightarrow \triangle BPC \cong \triangle BQC$  (ض ض ض)  $\Rightarrow \angle PBC = \angle QBC$
۲. مثلث‌های  $BPO$  و  $BQO$ :  $BP = BQ$ ,  $BO$  مشترک،  $\angle PBO = \angle QBO$  (ض ض ض)  $\Rightarrow \triangle BPO \cong \triangle BQO$   $\Rightarrow \angle BOP = \angle BOQ$
۳.  $P, O, Q$  روی یک خط‌اند، پس  $\angle BOP + \angle BOQ = 180^\circ$ ؛ در نتیجه هر کدام  $90^\circ$  است.  
پس  $BC \perp PQ$

۶. ثابت کنید در یک پنج‌ضلعی منتظم همه قطرها باهم برابرند.

- پنج‌ضلعی منتظم  $ABCDE$ : همه ضلع‌ها برابرند و همه زاویه‌ها برابرند. پنج قطر:  $AC, BD, CE, DA, EB$ .
- $\triangle ABC$  و  $\triangle BCD$ :  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \angle BCD$ ,  $BC = CD$  (ض ض ض)  $\Rightarrow AC = BD$
  - $\triangle BCD$  و  $\triangle CDE$ :  $BC = CD$ ,  $\angle BCD = \angle CDE$ ,  $CD = DE$  (ض ض ض)  $\Rightarrow BD = CE$
  - $\triangle CDE$  و  $\triangle DEA$ :  $CE = DA$  (ض ض ض)  $\Rightarrow CE = DA$
  - $\triangle DEA$  و  $\triangle EAB$ :  $DA = EB$  (ض ض ض)  $\Rightarrow DA = EB$
- پس  $AC = BD = CE = DA = EB$

۷. دو پاره خط  $AC$  و  $BD$  یکدیگر را در نقطه  $E$  قطع کرده‌اند به طوری که  $AE = DC$ ,  $\angle ADC = \angle DEC$  و  $AD = BE$ . اگر طول  $AE$  یک واحد کمتر از طول  $AB$  باشد، آنگاه طول  $EC$  چقدر است؟

۱.  $\angle BEA = \angle DEC$  (متقابل به رأس) و  $\angle DEC = \angle ADC$  (فرض)؛ پس  $\angle BEA = \angle ADC$

2. مثلث‌های EBA و DAC:  $EB = DA$  (فرض)،  $EA = DC$  (فرض)، و زاویه بین آن‌ها  $\angle BEA = \angle ADC$ . طبق (ض‌ض):  $\triangle EBA \cong \triangle DAC$  با تناظر  $E \leftrightarrow D, B \leftrightarrow A, A \leftrightarrow C$ .

3. ضلع‌های روبه‌رو به E و D:  $BA = AC$ ، پس  $AB = AC$ .

4.  $AB = AE + 1$  و  $AC = AE + EC$  چون  $AB = AC$ :  $AE + 1 = AE + EC \Rightarrow EC = 1$ .

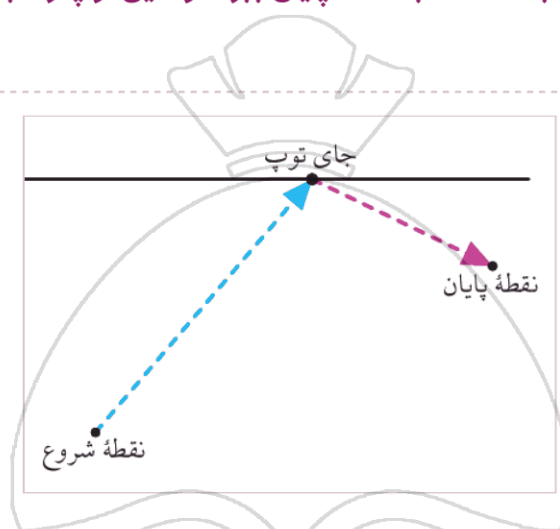
پاسخ:  $EC = 1$ .

مسئله

صفحه ۹۷

۲۹

۸. نوشین در یک مسابقه که در حیاط مهدکودک برگزار می‌شود، باید از نقطه شروع به سمت دیوار (خط سیاه) بدود و توپی را که خودش قبلاً آنجا گذاشته به نقطه پایان ببرد. نوشین توپ را کجا قرار دهد تا در کمترین زمان این کار را انجام دهد؟



شروع (S) و پایان (T) هر دو در یک طرف دیوارند. قرینه T نسبت به دیوار را T' می‌نامیم (طوری که دیوار عمودمنصف TT' باشد).

1. برای هر نقطه X روی دیوار،  $XT = XT'$  (هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است). پس مسیر نوشین  $SX + XT = SX + XT'$  است.

2. در هر مثلث، مجموع دو ضلع از ضلع سوم بیشتر یا برابر است؛ پس  $SX + XT' \geq ST'$  و تساوی فقط وقتی است که X روی پاره‌خط ST' باشد.

3. پس بهترین نقطه X جایی است که پاره‌خط ST' دیوار را قطع می‌کند.

پاسخ: توپ را در نقطه‌ای از دیوار بگذارد که پاره‌خط واصل شروع به قرینه نقطه پایان (نسبت به دیوار) دیوار را قطع می‌کند. در این نقطه، زاویه‌ای که مسیر رفت و مسیر برگشت با دیوار می‌سازند برابرند (متقابل به رأس با زاویه مسیر ST' و XT')، کوتاه‌ترین مسیر ST' است.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۹. پاره خط  $AB$  در نقطه  $O$  پاره خط  $CD$  را نصف کرده است. اگر  $AD = BC$ ، آیا می توان نتیجه گرفت دو مثلث  $AOD$  و  $BOC$  هم نهشت اند؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

در دو مثلث  $AOD$  و  $BOC$ :  $OD = OC$  (O وسط  $CD$ )،  $AD = BC$  و  $\angle AOD = \angle BOC$  (متقابل به رأس). این دو ضلع و زاویه، زاویه بین دو ضلع نیست (زاویه روبه رو به  $AD$  و  $BC$  است)، پس (ضرض) نیست.

**پاسخ: خیر، نمی توان.** مثال نقض:  $O(0,0)$ ،  $D(-5,0)$ ،  $C(5,0)$ ،  $A(-1,2)$ ،  $B(2,4)$ ،  $O(0,0)$ ،  $A, O, B$  هم خط و بین آن ها است.  $AD^2 = 3,8^2 + 1,6^2 = 17 = BC^2 = 2,6^2 + 3,2^2$  و  $OD = OC = 5$  ولی  $OA = 2 \neq OB = 4$ ؛ دو مثلث هم نهشت نیستند.

**شرط های لازم شده:** یکی از این ها: (۱)  $O$  وسط  $AB$  هم باشد ( $OA = OB$ )  $\Rightarrow$  (ضرض)؛ (۲)  $\angle OAD = \angle OBC$   $\Rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC$  (ضزز) (زاویه های سوم هم برابرند و ضلع  $AD = BC$  بین دو زاویه است)؛ (۳)  $AD \parallel BC$  (زاویه های متبادل برابرند و همین حالت (۲) می شود).

۱۰. پاره خط  $BD$  در نقطه  $E$  پاره خط  $AC$  را نصف کرده است به طوری که  $CD = AB$  و  $\angle EBA = \angle EDC$ . ثابت کنید  $BE = DE$ .

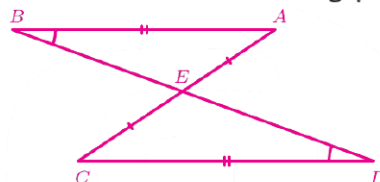
بهمن این مسئله را این گونه حل کرده است:

(الف) چرا راه حل بهمن نادرست است؟

(ب) راه حل بهمن را اصلاح کنید.

بهمن این مسئله را این گونه حل کرده است:

چون پاره خط  $BD$ ، پاره خط  $AC$  را نصف کرده است پس  $AE = CE$  از طرفی بنا به صورت مسئله می دانیم  $\angle EBA = \angle EDC$  و  $AB = CD$ . بنابراین دو مثلث  $ABE$  و  $CDE$  هم نهشت اند. پس  $DE = BE$ .



(الف) بهمن از « $\angle EBA = \angle EDC$  و  $AB = CD$ ،  $AE = CE$ » هم نهشتی  $ABE$  و  $CDE$  را نتیجه گرفته است. اما زاویه  $\angle EBA$  (در  $B$ ) بین ضلع های  $AB$  و  $BE$  است و ضلع  $AE$  روبه روی آن قرار دارد؛ یعنی دو ضلع و زاویه غیر بین (ضضز) برابرند، و این حالت برای هم نهشتی کافی نیست.

(ب) راه حل درست: در مثلث های ABE و CDE:

○  $\angle EBA = \angle EDC$  (فرض)

○  $\angle AEB = \angle CED$  (متقابل به رأس)

○ پس زاویه سوم هم برابر است:  $\angle A = \angle C$  (مجموع زاویه ها  $180^\circ$  است)

○  $AB = CD$  (فرض) و ضلع AB بین زاویه های A و B، و CD بین زاویه های C و D است.

طبق (ض ز):  $\triangle ABE \cong \triangle CDE \Rightarrow BE = DE$  و  $AE = CE$ . نکته: برابری  $AE = CE$  نتیجه همین هم نهشتی است و همان طور که دیدیم باید ثابت شود نه اینکه «نصف شدن AC» به عنوان فرض کمکی به کار رود.

مسئله

صفحه ۹۸

۳۲

۱۱. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام یک از عبارات های زیر همواره درست است و کدام یک همواره درست نیست.

(الف) اگر دو زاویه و یک ضلع مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم نهشت اند.  
(ب) اگر دو زاویه و یک ضلع از مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث هم نهشت اند.

(الف) همواره درست نیست. «برابر باشند» یعنی فقط اندازه ها یکی است، نه اینکه ضلع ها در دو مثلث جای یکسانی داشته باشند. مثال: مثلث اول، قائم الزاویه متساوی الساقین با ضلع های قائمه ۲، ۲ و وتر  $2\sqrt{2}$ ؛ مثلث دوم، قائم الزاویه متساوی الساقین با وتر ۲ و ضلع های قائمه  $\sqrt{2}$ ،  $\sqrt{2}$ . هر دو زاویه های  $45^\circ$  و  $90^\circ$  و یک ضلع به طول ۲ دارند (در مثلث اول ضلع قائمه، در دوم وتر)، ولی هم نهشت نیستند (مساحت ها ۲ و ۱).

(ب) همواره درست است. دو زاویه و یک ضلع نظیر به نظیر برابر باشند: یا ضلع بین دو زاویه است که حالت (ض ز) است. یا ضلع بین نیست؛ در این صورت زاویه سوم هم در دو مثلث برابر است (مجموع زاویه ها  $180^\circ$ )، و ضلع داده شده بین دو زاویه نظیر (یکی از دو زاویه داده شده و زاویه سوم) قرار می گیرد؛ پس باز هم (ض ز) است.

مسئله

صفحه ۹۸

۳۳

۱۲. اگر دو ضلع و زاویه غیر بین آن دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آیا این دو مثلث همواره هم نهشت اند؟

پاسخ: خیر. مثال نقض: زاویه  $\angle B = 30^\circ$  با ضلع  $AB = 6$ . از A بر ضلع دیگر زاویه عمود AH را رسم می کنیم؛ در مثلث قائم الزاویه ABH (زاویه  $30^\circ$ ) داریم  $AH = 3$  (نصف وتر) و  $BH = \sqrt{(36 - 9)} = 3\sqrt{3}$ .

نقطه C روی ضلع زاویه را طوری می‌گیریم که  $AC = 5$ . در مثلث قائم‌الزاویه AHC:  $HC \Rightarrow HC^2 = 25 - 9 = 16$ :  $HC = 4$ . دو نقطه با  $HC = 4$  وجود دارد: یکی در طرف B نسبت به H و یکی در طرف دیگر:

$$BC_1 = 3\sqrt{3} - 4 \approx 1,2 \quad \circ$$

$$BC_2 = 3\sqrt{3} + 4 \approx 9,2 \quad \circ$$

در هر دو مثلث  $ABC_1$  و  $ABC_2$ :  $AB = 6$ ,  $AC = 5$  (ضلع‌ها) و  $\angle B = 30^\circ$  (زاویه روبه‌رو به AC، غیر بین AB و AC). ولی  $BC_1 \neq BC_2$ ، پس هم‌نهشت نیستند. بنابراین (ض‌ض‌ز) حالت هم‌نهشتی نیست.

مسئله

صفحه ۹۹

۳۴

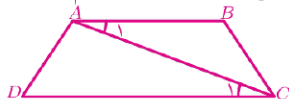
۱۳. شقایق و افرا مسئله قبل را این‌گونه حل کرده‌اند:

الف) درباره راه‌حل شقایق و راه‌حل افرا بحث کنید.

ب) راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

راه‌حل شقایق:

با یک مثال نشان می‌دهیم این دو مثلث همواره هم‌نهشت نیستند.



در دوزنقه ABCD، AB موازی است و  $AD = BC$ .

چون  $AB \parallel CD$  و AC مورب است پس  $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ . پس دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ABC با دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ADC نظیر به نظیر برابرند:

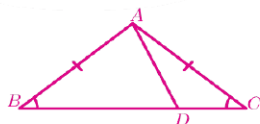
$$AC = AC, \quad \hat{A}_1 = \hat{C}_1, \quad AD = BC.$$

اما در دوزنقه ضلع‌های موازی، مساوی نیستند ( $AB \neq CD$ ). بنابراین دو مثلث ABC و ACD هم‌نهشت نیستند.

راه‌حل افرا:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطه D را روی BC طوری انتخاب کرده‌ایم که

$$BD \neq CD$$



پس رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$AB = AC, \quad \hat{B} = \hat{C}, \quad AD = AD \quad (*)$$

چون  $BD \neq CD$ ، پس دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت نیستند؛ در حالی که بنابه روابط (\*) دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ABD با دو ضلع و زاویه غیر بین از مثلث ACD نظیر به نظیر برابرند.

**الف)** هر دو راه حل درست اند و هر یک با یک مثال نقض نشان می دهد که حالت (ضضز غیر بین) هم نهشتی نمی دهد.

○ **شقایق:** در دوزنقه متساوی الساقین ABCD ( $AB \neq CD, AD = BC, AB \parallel CD$ ) قطر AC را رسم کرده است. زاویه های متبادل  $A_1 = C_1$  برابرند (چون  $AB \parallel CD$ )؛ پس مثلث های ABC و ACD ضلع AC مشترک،  $BC = AD$  و  $\angle A_1 = \angle C_1$  (روبه رو به BC و AD) دارند. اما چون  $AB \neq CD$  و دو مثلث ضلع های AC و  $BC = AD$  یکسان دارند، مجموعه ضلع ها فرق می کند و هم نهشت نیستند. (مثال عددی:  $A(1,2), B(3,2), C(4,0), D(0,0)$ : ضلع های ABC:  $2, \sqrt{5}, \sqrt{13}$ ; ACD:  $4, \sqrt{5}, \sqrt{13}$ ).

○ **افرا:** در مثلث متساوی الساقین ABC ( $AB = AC$ ) نقطه D را روی BC با  $BD \neq CD$  گرفته و AD را رسم کرده است.  $AB = AC, \angle B = \angle C$ ، AD مشترک: دو ضلع و زاویه غیر بین برابر است، ولی چون  $BD \neq CD$  مثلث های ABD و ACD هم نهشت نیستند. (مثال عددی:  $A(0,4), D(1,0), C(3,0), B(-3,0)$ :  $BD = 4, CD = 2$ ).

نکته مشترک: هر دو راه حل یک ضلع مشترک بین دو مثلث دارند. در راه حل شقایق باید یادآوری کرد که  $AB \neq CD$  خود دلیل ناهم نهشتی است؛ در راه حل افرا «پس هم نهشت نیستند» از  $BD \neq CD$  می آید.

**ب)** راه حل دیگر: همان مثال مسئله قبل (ضلع  $AB = 6, AC = 5, \angle B = 30^\circ$ ): دو نقطه  $C_1$  و  $C_2$  روی ضلع زاویه با  $BC_1 = 3\sqrt{3} - 4$  و  $BC_2 = 3\sqrt{3} + 4$ ؛ مثلث های  $ABC_1$  و  $ABC_2$  ضلع های AB، AC و زاویه B یکسان دارند ولی هم نهشت نیستند.

مسئله

صفحه ۱۰۰

۳۵

۱۴. در مثلث متساوی الساقین ABC نقطه های M و N به ترتیب روی ساق های AB و AC قرار دارند به طوری که  $AM = AN$ . اگر نقطه O محل برخورد BN و CM باشد، آنگاه ثابت کنید:

**الف)** دو مثلث ANB و AMC هم نهشت اند.

**ب)** دو مثلث OCN و OBM هم نهشت اند.

AB = AC (ساق ها).

**الف)** مثلث های ANB و AMC:  $AN = AM, AB = AC, \angle A$  مشترک (بین آن دو ضلع)  $\Rightarrow$  (ضضض)  $\triangle ANB \cong \triangle AMC$ . نتیجه:  $\angle ANB = \angle AMC$  و  $\angle ABN = \angle ACM$ .

**ب)** مثلث های OCN و OBM:

$$NC = AC - AN = AB - AM = MB \quad \circ$$

$$\angle OCN = \angle ACM = \angle ABN = \angle OBM \quad \circ \quad (\text{از الف})$$

$$\angle ONC = 180^\circ - \angle ANB = 180^\circ - \angle AMC = \angle OMB \quad \circ \quad (A, M, B \text{ و } A, N, C \text{ هم خط اند}).$$

طبق (ض ز):  $\triangle OCN \cong \triangle OBM$  (با تناظر  $O \leftrightarrow O, C \leftrightarrow B, N \leftrightarrow M$ ).

مسئله

صفحه ۱۰۰

۳۶

۱۵. ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین،

الف) نیمساز زاویه های پای ساق باهم برابرند.

ب) میانه های وارد بر ساق ها باهم برابرند.

مثلث  $ABC$  با  $AB = AC$ ; پس  $\angle B = \angle C$  (زاویه های روبه رو به ساق های برابر).

الف)  $BD$  نیمساز  $\angle B$  (روی  $AC$ ) و  $CE$  نیمساز  $\angle C$  (روی  $AB$ ). مثلث های  $BCD$  و  $CBE$ :  $BC$  مشترک،  $BD = CE \Rightarrow \triangle BCD \cong \triangle CBE$  (ض ز):  $\angle BCD = \angle C = \angle B = \angle CBE$ ,  $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle C = \angle ECB$ .  $CE$ .

ب)  $M$  وسط  $AB$  و  $N$  وسط  $AC$ .  $MB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = NC$ . مثلث های  $MBC$  و  $NCB$ :  $MB = NC$ ,  $\angle B = \angle C$ ,  $BC$  مشترک  $\Rightarrow \triangle MBC \cong \triangle NCB$  (ض ز).  $CM = BN$ .

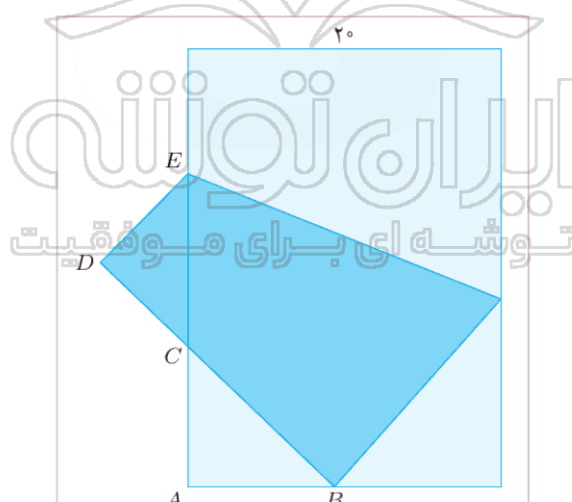
مسئله

صفحه ۱۰۰

۳۷

۱۶. یک کاغذ مستطیلی به عرض  $۲۰$  سانتی متر را مانند شکل زیر طوری تا کرده ایم که یکی از رأس ها روی وسط

ضلع دیگر افتاده است. حال دو مثلث  $ABC$  و  $CDE$  هم نهشت شده اند. طول این مستطیل را بیابید.



رأس بالا-راست مستطیل روی وسط ضلع پایین (B) افتاده است:  $AB = 20 \div 2 = 10$ . ضلع بالای مستطیل (به طول 20) بعد از تا شدن به پاره DB تبدیل شده است، پس  $DB = 20$ . زاویه های A و D در مثلث های ABC و CDE قائمه اند (زاویه مستطیل و تصویر زاویه گوشه بالا-چپ).

1. زاویه ACB و DCE متقابل به رأس اند. دو مثلث هم نهشت و قائم الزاویه اند و زاویه های برابر در آنها متناظرند؛ پس  $A \leftrightarrow D, C \leftrightarrow C, B \leftrightarrow E$ :  $BC = EC, AC = DC, AB = DE = 10$ .

2.  $AC = x$  می نامیم؛  $BC = y$ . مثلث ABC قائم الزاویه است:  $y^2 = x^2 + 10^2$  و  $DB = DC + CB = x + y = 20$  و  $y = 20 - x \Rightarrow$

3.  $y = 12,5, x = 7,5 \Rightarrow 400 - 40x = 100 \Rightarrow (20 - x)^2 = x^2 + 100$

4.  $AE = AC + CE = x + y = 7,5 + 12,5 = 20$

5.  $ED = 10$  تصویر پاره E تا گوشه بالا-چپ مستطیل است، پس فاصله E تا گوشه بالا-چپ 10 است؛ طول مستطیل  $= AE + 10 = 30$ .

**پاسخ:** 30 سانتی متر. (راستی آزمایی با مختصات: برای مستطیل  $20 \times 30$ ، مثلث های ABC و CDE دقیقاً اضلاع  $7,5, 10, 12,5$  دارند و  $DB = 20$ ).

مسئله

صفحه ۱۰۰

۳۸

۱۷. ثابت کنید اگر یکی از میانه های مثلثی، نیمساز نیز باشد، آنگاه این مثلث متساوی الساقین است. راهنمایی: میانه را به اندازه خودش ادامه دهید.

در مثلث ABC، AM هم میانه ( $BM = CM$ ) و هم نیمساز ( $\angle BAM = \angle CAM$ ) است. AM را از طرف M به اندازه خودش ادامه می دهیم تا D پیدا شود:  $MD = AM$ .

1. مثلث های ABM و DCM:  $AM = DM, BM = CM, \angle AMB = \angle DMC$  (متقابل به رأس)  $\Rightarrow$  (ض ض ض)  $\triangle ABM \cong \triangle DCM \Rightarrow AB = DC$  و  $\angle BAM = \angle D$ .

2. چون  $\angle BAM = \angle CAM = \angle D$ :  $\angle CAD = \angle CAM = \angle BAM = \angle D$ . در مثلث ACD دو زاویه A و D برابرند، پس ضلع های روبه رویشان برابرند:  $CD = CA$ .

3.  $AB = DC = CA$

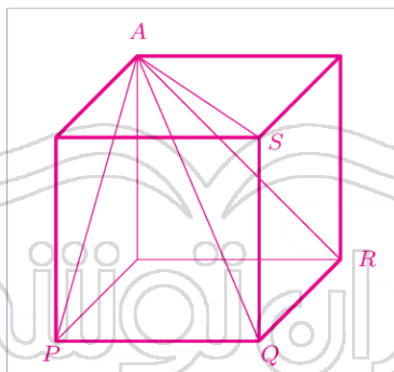
پس  $AB = AC$  و مثلث متساوی الساقین است.

۱۸. نقطه  $M$  وسط ضلع  $AC$  از مثلث  $ABC$  است. اگر نقطه  $D$  چنان روی ضلع  $BC$  قرار داشته باشد که  $CD + DM = BM$  و  $\angle BMA = \angle DMC$ ، آنگاه ثابت کنید:  $\angle ACB + \angle ABM = \angle BAC$ .

۱. روی  $BM$  نقطه  $P$  را طوری می‌گیریم که  $MP = MD$ . چون  $BP = BM - MP = CD$ ،  $BM = CD + DM$
۲. مثلث‌های  $AMP$  و  $CMD$ :  $AM = CM$  (وسط  $M$  از  $AC$ )،  $MP = MD$ ،  $\angle AMP = \angle CMD$   $\Rightarrow \angle MAP = \angle MCD = \angle ACB$  و  $AP = CD$  پس  $\triangle AMP \cong \triangle CMD$  (ض‌ض)
۳. پس مثلث  $ABP$  متساوی‌الساقین است و  $AP = CD = BP$ ؛ پس  $\angle BAP = \angle ABP = \angle ABM$
۴.  $\angle BAC = \angle BAP + \angle PAM = \angle ABM + \angle ACB$

که همان حکم است.

۱۹. در مکعب زیر، در بین اندازه‌های  $\angle RAS$ ،  $\angle QAS$ ،  $\angle QAR$ ،  $\angle PAS$ ،  $\angle PAR$  و  $\angle PAQ$  چند مقدار مختلف وجود دارد؟



طول یال را ۱ می‌گیریم.  $AP$ ،  $AS$ ،  $AR$  قطر وجه‌اند  $(\sqrt{2})$  و  $PR$ ،  $SP$ ،  $RS$  نیز قطر وجه‌اند  $(\sqrt{2})$ .

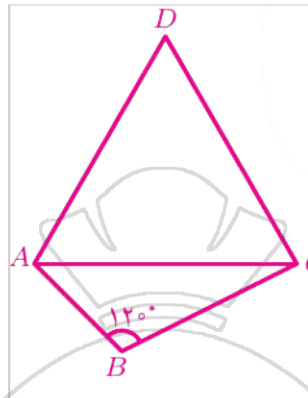
- $\triangle APR$ ،  $\triangle APS$ ،  $\triangle ARS$  سه ضلعشان  $\sqrt{2}$  است، پس متساوی‌الاضلاع‌اند و  $\angle RAS = \angle PAS = \angle PAR = 60^\circ$ .
- $AQ$  قطر مکعب است. سه مثلث  $QAS$ ،  $QAR$ ،  $QAP$  همگی ضلع‌های  $\sqrt{2}$  (قطر وجه  $AP$ ،  $AR$ ،  $AS$ )، ۱ یال  $AQ$  دارند؛ پس طبق (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند و  $\angle QAS = \angle QAR = \angle PAQ$ . این مثلث‌ها در  $P$ ،  $R$ ،  $S$  قائمه‌اند (یال بر وجه بالا عمود است)؛ ضلع روبه‌رو به  $A$  یعنی ۱ کوچک‌تر از  $\sqrt{2}$  است، پس  $\angle A < 90^\circ$  و چون مجموعشان  $90^\circ$  است،  $\angle A < 45^\circ$ .
- پس این سه زاویه با  $60^\circ$  برابر نیستند. **پاسخ: دو مقدار مختلف** (سه زاویه  $60^\circ$  و سه زاویه هم‌اندازه کوچک‌تر از  $45^\circ$ ؛ مقدار دقیق دومی تقریباً  $35,3^\circ$  است).

۲۰. در شکل روبه‌رو، مثلث  $ACD$  متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید:

الف) پاره خط  $BD$  نیمساز زاویه  $B$  است.

ب)  $BD = AB + BC$ .

راهنمایی:  $BC$  را از طرف  $B$  به اندازه  $AB$  امتداد دهید و نقطه  $E$  را بنامید. سپس ثابت کنید دو مثلث  $ABD$  و  $AEC$  هم‌نهشت‌اند.



در شکل  $\angle ABC = 120^\circ$ .  $BC$  را از  $B$  به اندازه  $AB$  ادامه می‌دهیم:  $BE = AB$ ، روی امتداد  $CB$ .

۱.  $\angle ABE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  و  $BA = BE \Rightarrow$  مثلث  $ABE$  متساوی‌الساقین با زاویه رأس  $60^\circ$ ؛ زاویه‌های پایه  $60^\circ = (180^\circ - 60^\circ) \div 2$ ، پس مثلث  $ABE$  متساوی‌الاضلاع است:  $AE = AB$  و  $\angle EAB = 60^\circ$ ،  $\angle AEB = 60^\circ$ .

۲. مثلث‌های  $ABD$  و  $AEC$ :  $AB = AE$ ؛  $AD = AC$  (مثلث  $ACD$  متساوی‌الاضلاع)؛

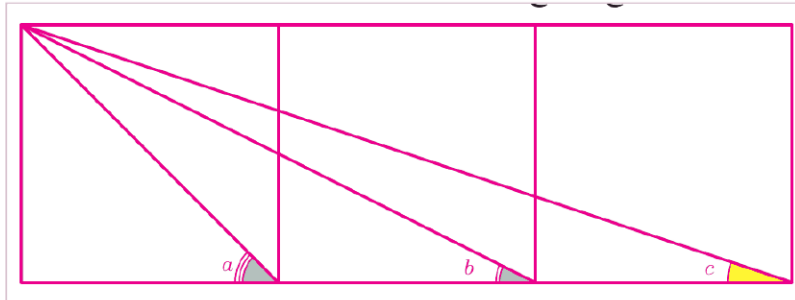
$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BAC + 60^\circ$  و  $\angle EAC = \angle EAB + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$ ، پس  $\angle BAD = \angle EAC$ . طبق (ض‌ض‌ض):  $\triangle ABD \cong \triangle AEC$ .

۳. ب) از هم‌نهشتی:  $BD = EC = EB + BC = AB + BC$ .

۴. الف) از هم‌نهشتی:  $\angle ABD = \angle AEC = \angle AEB = 60^\circ$  (روی پرتوی  $EB$  است). چهارضلعی  $ABCD$  محدب است (زاویه‌های  $A$  و  $C$  کمتر از  $180^\circ$ :  $60^\circ + \angle BAC$  و  $60^\circ + \angle BCA$  با  $60^\circ + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$ )، پس  $BD$  درون زاویه  $ABC$  است و  $\angle DBC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle ABD$ .

پس  $BD$  نیمساز  $\angle B$  است و  $BD = AB + BC$ .

۲۱. شکل زیر از سه مربع به ضلع واحد تشکیل شده است. مطلوب است  $a + b + c$ .

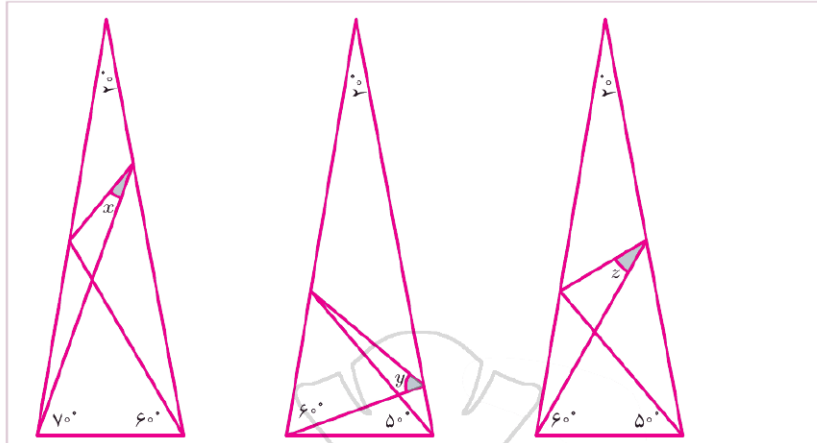


مبدأ را گوشه پایین-چپ مربع اول می‌گیریم؛  $T(0,1)$  گوشه بالا-چپ است. سه زاویه  $a, b, c$  در نقطه‌های  $(1,0)$ ،  $(2,0)$  و  $(3,0)$  بین قاعده و خط‌های وصل‌شده به  $T$  هستند.

۱.  $a$ : مثلث  $T, (0,0), (1,0)$  قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است (دو ضلع قائمه ۱)  $\Rightarrow a = 45^\circ$ .
  ۲.  $b + c$ : نقطه‌های  $B_2(2,0)$ ،  $U(-1,-1)$  و  $T(0,1)$  را در نظر می‌گیریم.  $TU^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ،  $TB_2^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ ، چون  $B_2U^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ ، مثلث  $TB_2U$  در  $T$  قائمه و متساوی‌الساقین است  $\Rightarrow \angle TB_2U = 45^\circ$ .
  ۳.  $\angle TB_2U = \angle TB_2Z + \angle ZB_2U$  که  $\angle TB_2Z = b$  (زاویه  $b$ ).  $\angle ZB_2U = c$ .
  ۴. زاویه  $\angle ZB_2U$ : از  $U$  عمود بر محور افقی را بیاوریم (پایش  $(-1,0)$ )؛ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های قائمه ۳ و ۱ به دست می‌آید که با مثلث  $TZB_3$  ( $ZT = 1$ ،  $ZB_3 = 3$ ) هم‌نهشت است (ض‌ض). پس  $\angle ZB_2U = \angle ZB_3T = c$ .
  ۵. بنابراین  $b + c = 45^\circ$ .
- پاسخ:  $a + b + c = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ .

ایران توشه  
توشه‌ای برای موفقیت

۲۲. در زیر، سه مثلث متساوی الساقین می بینید که زاویه رأس آنها  $20^\circ$  درجه است. مقادیرهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  را بیابید.



در هر مثلث  $ABC$  با  $AB = AC$  و  $\angle A = 20^\circ$ ، زاویه های پایه  $\angle B = \angle C = 80^\circ$  است.

**شکل اول (x):**  $\angle PBC = 70^\circ$  (P روی AC)،  $\angle QCB = 60^\circ$  (Q روی AB)،  $x = \angle QPB$ . نکته:  $\angle ABP = 10^\circ$  و  $\angle ACQ = 20^\circ$ .

۱. نقطه  $P_3$  روی AC با  $\angle P_3BC = 60^\circ$  را می گیریم. مثلث های  $BCP_3$  و  $CBQ$ : BC مشترک،

$\angle BCP_3 = \angle CBQ = 80^\circ$ ،  $\angle P_3BC = \angle QCB = 60^\circ \Rightarrow \angle BCP_3 = \angle CBQ = 80^\circ$ ،  $\angle P_3BC = \angle QCB = 60^\circ$  (ض ز)  $\Rightarrow$  هم نهشت اند  $\Rightarrow BP_3 = CQ$  و  $CP_3 = BQ$

پس  $BQ = AP_3 = AC - CP_3 = AB - BQ = AQ$

۲. F را محل برخورد  $BP_3$  و CQ می نامیم:  $\angle FBC = \angle FCB = 60^\circ \Rightarrow \triangle BCF$  متساوی الاضلاع:  $BF = CF =$

BC.  $FP_3 = BP_3 - BF = CQ - CF = FQ$  و  $\angle QFP_3 = \angle BFC = 60^\circ \Rightarrow \triangle QFP_3$  متساوی الاضلاع:  $P_3Q = P_3F$ .

۳. AF نیمساز  $\angle A$  است (مثلث های  $ABF$  و  $ACF$  هم نهشت اند، ض ض ض)  $\Rightarrow \angle BAF = 10^\circ$ . مثلث های

$ABF$  و  $BAP$ : AB مشترک،  $\angle BAF = 10^\circ = \angle ABP$  و  $\angle BAP = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ = \angle ABF$  (ض ز)  $\Rightarrow$

هم نهشت اند  $\Rightarrow AP = BF = BC$ .

۴.  $AP_3 = P_3B$  (در مثلث  $ABP_3$  زاویه های A و  $ABP_3$  هر دو  $20^\circ$  اند). پس  $AP = BF < BP_3 = AP_3$ ، یعنی P بین A

و  $P_3$  است و  $P_3P = AP_3 - AP = BP_3 - BF = P_3F$ .

۵.  $P_3Q = P_3F = P_3P$ : مثلث  $QP_3P$  متساوی الساقین است. در مثلث متساوی الساقین  $AQP_3$  ( $AQ = AP_3$ )،

$\angle AP_3Q = 80^\circ$  ( $\angle A = 20^\circ$ ) پس زاویه رأس  $\angle QP_3P = 80^\circ$  و زاویه های پایه  $\angle P_3PQ = (180^\circ - 80^\circ) \div 2 = 50^\circ$ ؛ یعنی  $\angle QPC = 50^\circ$ .

۶. در مثلث  $BPC$ :  $\angle BPC = 180^\circ - 70^\circ - 80^\circ = 30^\circ$ . پس  $x = \angle QPB = \angle QPC - \angle BPC = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$ .

شکل دوم (y):  $\angle RBC = 20^\circ$  و  $\angle SCB = 50^\circ$  (R روی AC، S روی AB).  $\angle ABR = 60^\circ \Rightarrow$

○ مثلث BRC:  $\angle RBC = 20^\circ$ ،  $\angle C = 80^\circ \Rightarrow \angle BRC = 80^\circ = \angle C \Rightarrow BR = BC$ .

○ مثلث SBC:  $\angle SBC = 80^\circ$ ،  $\angle SCB = 50^\circ \Rightarrow \angle BSC = 50^\circ = \angle SCB \Rightarrow BS = BC$ .

○ پس  $BS = BR$  و  $\angle SBR = \angle ABR = 60^\circ$ : مثلث متساوی الساقین با زاویه رأس  $60^\circ$  متساوی الاضلاع است.

پس  $y = \angle SRB = 60^\circ$ .

شکل سوم (z):  $\angle PBC = 60^\circ$ ،  $\angle QCB = 50^\circ$ ؛  $\angle QPB = z$ .

1. E را روی AB با  $\angle ECB = 60^\circ$  می‌گیریم. مثل بالا  $\triangle BCP \cong \triangle CBE$  (ضضز)  $\Rightarrow CE = BP$ . F برخورد BP و

CE:  $BCF$  متساوی الاضلاع؛  $FE = CE - CF = BP - BF = FP$  و  $\angle EFP = \angle BFC = 60^\circ \Rightarrow EFP$

متساوی الاضلاع:  $PE = PF = EF$ .

2. مثلث BQC:  $\angle QBC = 80^\circ$ ،  $\angle QCB = 50^\circ \Rightarrow \angle BQC = 50^\circ \Rightarrow BQ = BC = BF$ . مثلث BQF:

$\angle QBF = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$  پس  $\angle BFQ = (180^\circ - 20^\circ) \div 2 = 80^\circ$ .

3. مثلث BEC:  $\angle EBC = 80^\circ$ ،  $\angle ECB = 60^\circ \Rightarrow \angle BEC = 40^\circ$ ؛ پس  $\angle QEF = \angle BEC = 40^\circ$ . و  $\angle BFE =$

$180^\circ - \angle BFC = 120^\circ \Rightarrow \angle QFE = \angle BFE - \angle BFQ = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ . دو زاویه  $40^\circ$  در مثلث

$QE = QF \Rightarrow QEF$ .

4. مثلث‌های QEP و QFP:  $QE = QF$ ،  $PE = PF$ ،  $QP$  مشترک  $\Rightarrow$  (ضضض) هم‌نهشت‌اند  $\Rightarrow \angle QPE =$

$\angle QPF$ . Q درون زاویه EPF است و  $\angle EPF = 60^\circ$ ، پس  $\angle QPF = 30^\circ$  و چون B, F, P هم‌خط‌اند،  $z =$

$\angle QPB = \angle QPF = 30^\circ$ .

پاسخ:  $x = 20^\circ$ ،  $y = 60^\circ$ ،  $z = 30^\circ$ .



مسئله

صفحه ۱۰۲

۴۴

۲۳. پاره‌خط‌های AB، CD و EF در نقطه O هم‌رس‌اند. اگر CD پاره‌خط EF را نصف کرده باشد و OE و OF به ترتیب

میانه مثلث‌های BCO و ADO باشند، آیا می‌توان ثابت کرد دو مثلث BOE و AOF هم‌نهشت‌اند؟ اگر پاسخ خیر

است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

پاسخ: بله، می‌توان ثابت کرد؛ شرط اضافه لازم نیست. فرض‌ها: O وسط EF (OE = OF)؛ E وسط BC و F وسط

AD (چون OE و OF میانه‌اند)؛ O بین A, B و بین C, D قرار دارد.

1. OE را از طرف E به اندازه خودش ادامه می‌دهیم:  $EG = OE$ ؛ و OF را از طرف F:  $FH = OF$ . چون  $OE = OF$

و E, O, F و O, G, H وسط‌اند،  $OG = 2OE = 2OF = OH$  است.

2. مثلث‌های EBG و ECO:  $EB = EC$ ،  $EG = EO$ ،  $\angle BEG = \angle CEO$  (متقابل به رأس)  $\Rightarrow$  (ضضض)

هم‌نهشت‌اند  $\Rightarrow \angle EGB = \angle EOC$  (زاویه‌های متبادل) پس  $CO \parallel BG$ ، یعنی  $CD \parallel BG$ .

3. به همین ترتیب از  $\triangle FAH \cong \triangle FDO$ :  $AH \parallel DO$ ، یعنی  $CD \parallel AH$ . پس  $BG \parallel AH$ .

4. مثلث‌های  $OGB$  و  $OHA$ :  $OG = OH$ ،  $\angle GOB = \angle HOA$  (متقابل به رأس، زیرا  $G, O, H$  و  $A, O, B$  هر کدام هم خط‌اند) و  $\angle OGB = \angle OHA$  (متبادل بین دو خط موازی  $BG$  و  $AH$ )  $\Rightarrow$  (ض‌ض) هم‌نهشت‌اند  $\Rightarrow OB = OA$ .

5. مثلث‌های  $BOE$  و  $AOF$ :  $OE = OF$ ،  $OB = OA$ ،  $\angle BOE = \angle AOF$  (متقابل به رأس)  $\Rightarrow$  (ض‌ض)  $\triangle BOE \cong \triangle AOF$ .

(بررسی جبری مستقل: اگر  $B = b \cdot u$ ،  $A = -a \cdot u$ ،  $C = c \cdot v$ ،  $D = -d \cdot v$ ، آنگاه  $E + F = 0$  یعنی  $(b - a)u + (c - d)v = 0$  و چون  $u$  و  $v$  موازی نیستند،  $a = b$  و  $c = d$ .)

مسئله

صفحه ۱۰۲

۴۵

۱. یک سرباز کنار رودخانه ایستاده و می‌خواهد بداند عرض رودخانه چند قدم است. او شنیده است می‌تواند بدون اینکه وارد آب شود، عرض رودخانه را با استفاده از کلاهش به‌طور تقریبی اندازه بگیرد. این سرباز چگونه بفهمد عرض رودخانه چقدر است؟

سرباز صاف می‌ایستد و نقطه  $T$  را درست روبه‌روی خود در کناره آن طرف رودخانه در نظر می‌گیرد. کلاه را طوری پایین می‌آورد که لبه آن (و نوک بینی‌اش) خط دید او را به  $T$  برساند، یعنی خط دید با راستای قائم بدن (خط عمود بر زمین) زاویه مشخصی بسازد. سپس بدون تغییر دادن حالت سر و کلاه، به‌طرف خشکی می‌چرخد (روی زمین خودش) و نقطه  $S$  را که خط دید به آن می‌رسد روی زمین علامت می‌زند. فاصله پای او تا  $S$  را با قدم می‌شمارد؛ همین عرض رودخانه است.

**دلیل:** مثلث قائم‌الزاویه اول: رأس‌ها پای سرباز  $A$ ، چشم او  $H$  (روی همان خط عمود) و نقطه  $T$ ؛ مثلث دوم:  $A$ ،  $H$  و  $S$ . در هر دو، ضلع  $AH$  (ارتفاع چشم تا زمین) مشترک است، زاویه قائمه در  $A$  است و زاویه  $\angle AHT = \angle AHS$  (چون حالت سر و کلاه عوض نشده). طبق (ض‌ض) دو مثلث هم‌نهشت‌اند، پس  $AS = AT$  = عرض رودخانه.

توشه‌ای برای موفقیت

مسئله

صفحه ۱۰۳

۴۶

۲. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از عبارتهای زیر همواره درست است؟  
الف) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

**ب) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم الزاویه دیگر نظیر به نظیر برابر باشد، این دو مثلث هم نهشت اند.**

**الف) همواره درست نیست.** مثلث اول: ضلع های قائمه 3 و 4 (وتر 5). مثلث دوم: ضلع قائمه 3 و وتر 4 (ضلع قائمه دیگر  $\sqrt{7}$ ). هر دو مثلث دو ضلع به اندازه های 3 و 4 دارند ولی چون ضلع 4 در یکی ضلع قائمه و در دیگری وتر است، هم نهشت نیستند ( $5 \neq 4$ ).

**ب) همواره درست است.** «نظیر به نظیر» یعنی ضلع قائمه با ضلع قائمه و وتر با وتر برابر است. دو حالت:

- هر دو ضلع قائمه برابر: دو مثلث دو ضلع و زاویه بین آنها (زاویه قائمه) برابر دارند  $\Rightarrow$  (ضض).
- یک ضلع قائمه و وتر برابر: ضلع قائمه دوم از فیثاغورس ((وتر<sup>2</sup> - ضلع<sup>2</sup>) در دو مثلث برابر می شود؛ پس هر سه ضلع برابرند  $\Rightarrow$  (ضضض). (این همان «هم نهشتی مثلث های قائم الزاویه به حالت وتر و یک ضلع» است).

**پاسخ: فقط (ب).**

مسئله

صفحه ۱۰۳

۴۷

**۳. پاره خط های AB، CD و EF در نقطه O هم رس اند. اگر OE و OF به ترتیب ارتفاع مثلث های AOC و BOD باشند، آیا می توان ثابت کرد  $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ ؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.**

در مثلث های قائم الزاویه  $\triangle AOE$  ( $\angle E = 90^\circ$ ) و  $\triangle BOF$  ( $\angle F = 90^\circ$ ):  $\angle AOE = \angle BOF$  (متقابل به رأس، چون O، A، B و E، O، F هم خط اند). پس یک زاویه قائمه و یک زاویه حاده برابر داریم؛ ولی ضلعی معلوم نیست که برابر باشد.

**پاسخ: خیر، نمی توان.** مثال نقض:  $O(0,0)$ ،  $A(1,1)$ ،  $C(-1,1)$ ،  $B(-2,-2)$ ،  $D(2,-2)$ ،  $E(0,1)$ ،  $F(0,-2)$  روی AB و CD و EF است؛  $OE \perp AC$  و  $OF \perp BD$  (هر دو خط افقی اند). ولی  $OE = 1 \neq OF = 2$ ، پس مثلث ها هم نهشت نیستند (شکل شان متشابه است).

**شرط اضافه:** مثلاً  $OE = OF \Rightarrow \triangle AOE \cong \triangle BOF$  (ضض)؛ یا  $OA = OB \Rightarrow$  (وتر و زاویه حاده) هم نهشتی.

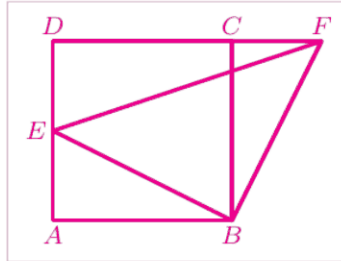
۴. در مربع ABCD، نقطه‌های E و F به ترتیب روی اضلاع BC و AB قرار دارند به طوری که  $AE = FC$ . اگر  $\angle BAE = 15^\circ$ ، آنگاه زاویه CFE چند درجه است؟

۱. مثلث‌های قائم‌الزاویه ABE و CBF ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $AB = CB$  (ضلع مربع) و  $AE = CF$  (وتر)  $\Rightarrow$  (وتر و یک ضلع)  $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ . پس  $BE = BF$  و  $\angle BCF = \angle BAE = 15^\circ$ .
  ۲.  $BE = BF$  و  $\angle B = 90^\circ$ : مثلث BEF قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است  $\Rightarrow \angle BFE = 45^\circ$ .
  ۳. در مثلث قائم‌الزاویه BCF:  $\angle BFC = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ .
  ۴. E روی BC است، پس ضلع FE بین FB و FC قرار دارد:  $\angle CFE = \angle BFC - \angle BFE = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ .
- پاسخ:  $30^\circ$ .

۵. ارتفاع AH، نیمساز BD و میانه CM از مثلث ABC در نقطه G هم‌رس‌اند. اگر  $AG = BG$ ، آنگاه ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۱.  $AG = BG \Rightarrow$  مثلث ABG متساوی‌الساقین  $\Rightarrow \angle GAB = \angle GBA$ .
۲.  $\angle GBA = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle B$  (نیمساز) و  $\angle GAB = \angle HAB = 90^\circ - \angle B$  (مثلث قائم‌الزاویه ABH). پس  $\angle B = 60^\circ \Rightarrow 90^\circ - \angle B = \frac{1}{2} \angle B$ .
۳. M وسط AB و  $GA = GB$ : در مثلث متساوی‌الساقین GAB، میانه GM بر قاعده AB عمود است ( $\triangle GAM \cong \triangle GBM$  به (ض ض ض) و دو زاویه مجاور در M برابر و مکمل‌اند).  $G \neq M$ ، چون M روی ارتفاع AH نیست؛ AB AH را فقط در A قطع می‌کند.
۴. خط CM همان خط GM است؛ پس  $CM \perp AB$  و M وسط AB. دو مثلث CMA و CMB:  $AM = BM$ ، CM مشترک،  $CA = CB \Rightarrow \angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$ .
۵. پس  $\angle A = \angle B = 60^\circ$  و  $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ؛ مثلث سه زاویه  $60^\circ$  دارد و متساوی‌الاضلاع است. (در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع و نیمساز و میانه در مرکز هم‌رس‌اند و  $AG = BG$  برقرار است.)

۶. در شکل زیر،  $ABCD$  مربع است. نقطه  $E$  روی  $AD$  و  $F$  روی امتداد  $DC$  قرار دارد به طوری که  $EB$  بر  $FB$  عمود است. اگر  $AB = 16$  و  $BE \times BF = 400$ ، آنگاه طول  $CF$  چقدر است؟



۱.  $\angle ABE = 90^\circ - \angle EBC = \angle CBF$ ، پس  $\angle ABC = 90^\circ$  و  $\angle EBF = 90^\circ$  ☐
۲. مثلث های  $ABE$  و  $CBF$ :  $\angle ABE = \angle CBF$ ،  $AB = CB$ ،  $\angle A = \angle BCF = 90^\circ \Rightarrow$  (رض ز) هم نهشت اند ☐
- $\Rightarrow BE = BF$  و  $AE = CF$  ☐
۳.  $BE = 20 \Rightarrow BE \times BF = BE^2 = 400$  ☐
۴. مثلث قائم الزاویه  $ABE$ :  $AE^2 = BE^2 - AB^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow AE = 12$  ☐
- پاسخ:  $CF = AE = 12$  ☐

۷. خط  $l$  ضلع های  $AB$  و  $BC$  از مستطیل  $ABCD$  را قطع کرده است. اگر فاصله نقطه های  $A$ ،  $C$  و  $D$  از خط  $l$  به ترتیب ۴، ۵ و ۷ سانتی متر باشد، آنگاه فاصله نقطه  $D$  از خط  $l$  چقدر است؟ راهنمایی: از نقطه  $B$  خطی موازی با  $l$  رسم کنید.

- چون  $l$  فقط ضلع های  $AB$  و  $BC$  را قطع می کند،  $B$  یک طرف  $l$  و  $A$ ،  $C$ ،  $D$  طرف دیگر قرار دارند.
۱. خط  $m$  را از  $B$  موازی  $l$  می کشیم.  $m$  و  $l$  به فاصله ۵ از هم اند و  $A$ ،  $C$ ،  $D$  طرف دیگر  $l$  هستند. فاصله  $A$  از  $m$ :  $4 + 5 = 9$  و فاصله  $C$  از  $m$ :  $7 + 5 = 12$  ☐
۲. در مستطیل (متوازی الاضلاع) بردارهای  $BA$  و  $BC$  را جمع می کنیم:  $BD = BA + BC$  (قطر متوازی الاضلاع). مؤلفه عمود بر  $l$  (ارتفاع) بردارها جمع می شود: ارتفاع  $D$  از  $m$  برابر  $9 + 12 = 21$  ☐
۳. فاصله  $D$  از  $l$ :  $21 - 5 = 16$  ☐
- پاسخ: ۱۶ سانتی متر. (با مختصات:  $l$  را محور  $x$  ها بگیریم؛  $B(0, -5)$ ،  $A(a, 4)$ ،  $C(c, 7)$ ،  $D = A + C - B = (a + c, 16)$ ) ☐

۸. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و درباره آنها با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

|                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| خط $d$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است و $AB$ را در نقطه $H$ قطع کرده است. نقطه دلخواه $M$ را روی خط $d$ انتخاب می‌کنیم. دو مثلث $AMH$ و $BMH$ هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $AM = BM$ . | فاصله $M$ از دو سر پاره‌خط $AB$ یکسان است؛ یعنی $AM = BM$ . میانه $MN$ از مثلث $AMB$ را رسم می‌کنیم. دو مثلث $AMN$ و $BMN$ هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس نقطه $M$ روی عمودمنصف پاره‌خط $AB$ قرار دارد. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**جعبه سمت راست:** فرض:  $d$  عمودمنصف  $AB$  است؛ حکم:  $M$  روی  $d \Rightarrow AM = BM$ . دو مثلث  $AMH$  و  $BMH$  هم‌نهشت‌اند، چون:  $AH = BH$  ( $H$  وسط  $AB$ )،  $\angle AHM = \angle BHM = 90^\circ$  و  $MH$  مشترک است  $\Rightarrow$  (ض.ض.). پس  $AM = BM$ .

**جعبه سمت چپ:** فرض:  $AM = BM$ ؛ حکم:  $M$  روی عمودمنصف  $AB$  است.  $N$  وسط  $AB$ . دو مثلث  $AMN$  و  $BMN$  هم‌نهشت‌اند، چون:  $AN = BN$ ،  $AM = BM$  و  $MN$  مشترک  $\Rightarrow$  (ض.ض.). پس  $\angle ANM = \angle BNM$ ؛ این دو زاویه روی یک خط راست‌اند و مجموعشان  $180^\circ$  است، پس هر کدام  $90^\circ$  است. بنابراین  $MN$  بر  $AB$  در وسط آن عمود است، یعنی  $M$  روی عمودمنصف  $AB$  قرار دارد.

**تفاوت:** جعبه اول از «روی عمودمنصف بودن» به «فاصله برابر» می‌رسد؛ جعبه دوم برعکس: از «فاصله برابر» به «روی عمودمنصف بودن» (عکس حکم).

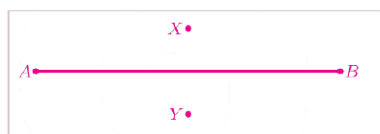
**نتیجه:** هر نقطه دلخواه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است؛ و برعکس، اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

۹. در شکل زیر،  $XA = YA$  و  $XB = YB$ .

کدام یک از جمله‌های زیر درست است و کدام یک نادرست؟ دلیل بیاورید.

الف)  $AB$  روی عمودمنصف  $XY$  است.

ب)  $XY$  روی عمودمنصف  $AB$  است.



$XA = YA$  یعنی  $A$  از دو سر پاره  $XY$  به یک فاصله است؛ پس طبق مسئله ۸،  $A$  روی عمودمنصف  $XY$  است. همین‌طور  $B \Rightarrow XB = YB$  هم روی عمودمنصف  $XY$  است.

**(الف) درست است.** دو نقطه  $A$  و  $B$  روی عمودمنصف  $XY$  هستند و از دو نقطه یک خط می‌گذرد؛ پس خط  $AB$  همان عمودمنصف  $XY$  است.

**(ب) همواره درست نیست.** برای اینکه  $XY$  روی عمودمنصف  $AB$  باشد، باید  $XA = XB$  (و  $YA = YB$ ) باشد، که از فرض‌ها نتیجه نمی‌شود. مثال نقض:  $A(0,0)$ ،  $B(4,0)$ ،  $X(1,1)$ ،  $Y(1,-1)$ :  $XA = YA = \sqrt{2}$  و  $XB = YB = \sqrt{10}$ ؛ خط  $XY$  بر  $AB$  عمود است ولی از وسط  $AB$  (نقطه  $(2,0)$ ) نمی‌گذرد.

مسئله

صفحه ۱۰۴

۵۴

**۱۰. پاره خط  $AE$  در نقطه  $R$  پاره خط  $BK$  را قطع می‌کند به طوری که  $AB = AK$ . آیا می‌توان ثابت کرد  $AE \perp BK$ ؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان ثابت کرد  $AE \perp BK$ .**

چون  $AB = AK$ ، نقطه  $A$  روی عمودمنصف  $BK$  است (مسئله ۸). ولی  $AE$  از  $A$  و  $R$  می‌گذرد و  $R$  روی  $BK$  است؛ بدون شرط دیگر معلوم نیست  $R$  وسط  $BK$  باشد.

**پاسخ: خیر.** مثال نقض:  $A(0,2)$ ،  $B(-1,0)$ ،  $K(1,0)$ ،  $R(0,5)$ ،  $AB = AK = \sqrt{5}$  ولی  $AR$  بر  $BK$  (محور افقی) عمود نیست.

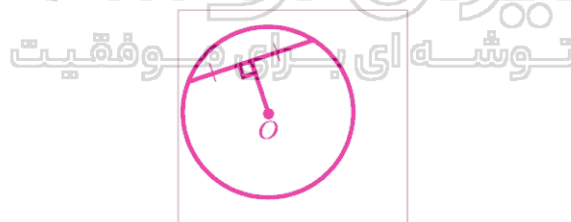
**شرط‌های ممکن:** (۱)  $R$  وسط  $BK$  باشد:  $\triangle ABR \cong \triangle AKR$  (ض ض ض)  $\Rightarrow \angle ARB = \angle ARK$  و مجموعشان  $180^\circ \Rightarrow$  هر کدام  $90^\circ$ . (۲)  $AE$  نیمساز  $\angle BAK$  باشد:  $AB = AK$ ،  $\angle BAR = \angle KAR$ ،  $AR$  مشترک  $\Rightarrow$  (ض ض ض)  $\Rightarrow \angle ARB = \angle ARK = 90^\circ$ .

مسئله

صفحه ۱۰۴

۵۵

**۱۱. در شکل زیر، آیا نقطه  $O$  مرکز دایره است؟ چرا؟**



**پاسخ: لزوماً نه.** از شکل:  $O$  بر وتر عمود شده و پای عمود وسط وتر است (علامت‌های برابر)؛ پس  $O$  روی عمودمنصف وتر است. مرکز دایره هم روی عمودمنصف هر وتر است (از دو سر وتر به یک فاصله شعاع)، ولی همه نقطه‌های عمودمنصف مرکز نیستند: هر نقطه دیگری روی همین خط نیز همین ویژگی را دارد. برای مرکز بودن  $O$  باید روی عمودمنصف وتر دومی هم باشد (یا فاصله  $O$  از چند نقطه دایره برابر باشد).

(مثلاً در دایره‌ای به مرکز  $(0,0)$  و شعاع 5، وتر افقی بین  $(-3,4)$  و  $(3,4)$  وسطش  $(0,4)$  است؛ هر نقطه  $(0, t)$  روی عمودمنصف است ولی فقط  $t = 0$  مرکز است.)

مسئله

صفحه ۱۰۵

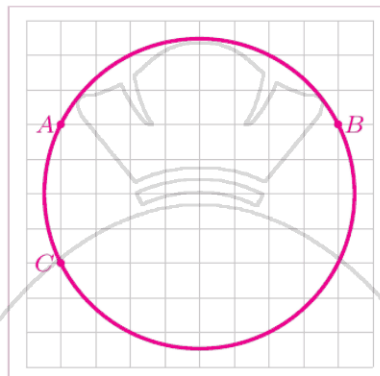
۵۶

۱۲. در شکل روبه‌رو،

الف) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از  $A$  و  $B$  فاصلهٔ یکسان دارند.

ب) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از  $A$  و  $C$  فاصلهٔ یکسان دارند.

ج) مرکز دایره را پیدا کنید.



مختصات را از روی شبکه می‌خوانیم (واحد: یک خانه، مبدأ گوشهٔ پایین-چپ):  $A(1, 7)$ ،  $B(9, 7)$ ،  $C(1, 3)$ .

الف) نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف  $AB$  هستند (مسئلهٔ ۸).  $AB$  افقی و وسطش  $(5, 7)$  است؛ پس عمودمنصف خط قائم  $x = 5$  است. جواب: پارهٔ آن خط که داخل دایره است.

ب)  $AC$  قائم است (روی  $x = 1$ ) و وسطش  $(1, 5)$ ؛ عمودمنصف، خط افقی  $y = 5$  است. جواب: پارهٔ آن خط که داخل دایره است.

ج) مرکز دایره از  $A$ ،  $B$ ،  $C$  (نقطه‌های روی دایره) به یک فاصله است، پس روی هر دو عمودمنصف است: محل برخورد  $x = 5$  و  $y = 5$ ، یعنی  $O(5, 5)$ . (راستی آزمایی:  $OA^2 = 4^2 + 2^2 = 20 = OB^2 = OC^2$ .)

مسئله

صفحه ۱۰۵

۵۷

۱۳. دایره‌ای به مرکز  $P$  و دایره‌ای به مرکز  $Q$  یکدیگر را در دو نقطهٔ  $X$  و  $Y$  قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید  $PQ$  عمودمنصف پاره خط  $XY$  است.

ب) آیا می‌توان گفت  $XY$  عمودمنصف  $PQ$  است؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا  $XY$  نیز عمودمنصف  $PQ$  باشد.

**الف)**  $X, Y$  روی دایره مرکز  $P$  هستند  $\Rightarrow PX = PY$  (شعاع)؛ پس  $P$  روی عمودمنصف  $XY$  است. همین‌طور  $QX = QY \Rightarrow Q$  روی عمودمنصف  $XY$  است. دو نقطه  $P$  و  $Q$  روی عمودمنصف  $XY$  هستند؛ پس خط  $PQ$  همان عمودمنصف  $XY$  است.

**ب) خیر، همواره نه.** مثال:  $P(0,0)$  با شعاع 5 و  $Q(6,0)$  با شعاع  $\sqrt{13}$ ؛  $X(4,3), Y(4,-3)$  روی هر دو دایره‌اند.  $XY$  خط  $x = 4$  است و از وسط  $PQ$  یعنی  $(3,0)$  نمی‌گذرد.

**شرط:** دو دایره شعاع برابر داشته باشند. آنگاه  $PX = QX$  و  $PY = QY$ ، پس  $X$  و  $Y$  هر دو از  $P$  و  $Q$  به یک فاصله‌اند و روی عمودمنصف  $PQ$  قرار دارند؛ یعنی  $XY$  عمودمنصف  $PQ$  است (چهارضلعی  $PXQY$  لوزی می‌شود).

مسئله

صفحه ۱۰۵

۵۸

۱۴. در مثلث  $ABC$ ،  $AB = AC$  و  $\angle A = 100^\circ$ . عمودمنصف‌های اضلاع  $AB$  و  $AC$  ضلع  $BC$  را در نقطه‌های  $E$  و  $F$  قطع می‌کنند. زاویه  $EAF$  چند درجه است؟

۱.  $\angle B = \angle C = (180^\circ - 100^\circ) \div 2 = 40^\circ \Rightarrow AB = AC$  ○
  ۲.  $E$  روی عمودمنصف  $AB$  است  $\Rightarrow EA = EB \Rightarrow$  مثلث  $EAB$  متساوی‌الساقین  $\Rightarrow \angle EAB = \angle B = 40^\circ$  ○
  ۳.  $F$  روی عمودمنصف  $AC$  است  $\Rightarrow FA = FC \Rightarrow \angle FAC = \angle C = 40^\circ$  ○
  ۴.  $E, F$  روی  $BC$  هستند؛ ترتیب روی  $BC$ :  $B, E, F, C$  ( $\angle BAE = 40^\circ < \angle BAF = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ ). پس  $\angle EAF = \angle BAC - \angle BAE - \angle FAC = 100^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 20^\circ$  ○
- پاسخ:  $20^\circ$ .

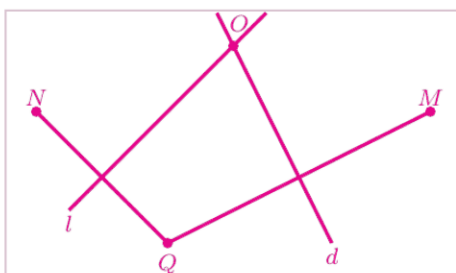
مسئله

صفحه ۱۰۵

۵۹

۱۵. در شکل زیر، خطوط  $d$  و  $l$  عمودمنصف پاره‌های  $QM$  و  $QN$  هستند.  
الف) همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که با رأس‌های  $M, N, Q$  و ساخته می‌شود را با ذکر دلیل نام ببرید.

(ب) با یک پرگار، به مرکز O و شعاع OQ دایره‌ای رسم کنید. چرا این دایره از M و N نیز می‌گذرد؟



O محل برخورد d و l است.

**الف)** O روی d (عمودمنصف QM) است  $\Rightarrow OQ = OM \Rightarrow$  مثلث OQM متساوی‌الساقین. O روی l (عمودمنصف QN) است  $\Rightarrow OQ = ON \Rightarrow$  مثلث OQN متساوی‌الساقین. از  $OM = OQ = ON \Rightarrow$  مثلث OMN متساوی‌الساقین. (مثلث QMN لزوماً متساوی‌الساقین نیست). پس سه مثلث: OQM, OQN, OMN.

**ب)**  $OM = OQ$  و  $ON = OQ$ ؛ یعنی M و N هم از O به فاصله OQ (شعاع) هستند و روی دایره‌اند.

مسئله

صفحه ۱۰۶

۶۰

۱۶. در زیر، دایره‌ای رسم کنید که هر سه نقطه A، B و C روی آن دایره باشند.



مرکز دایره باید از A, B, C به یک فاصله باشد؛ پس روی عمودمنصف AB و عمودمنصف BC است (مسئله ۸).

۱. با خط‌کش و پرگار، عمودمنصف AB را رسم کنید.
۲. عمودمنصف BC را رسم کنید.
۳. محل برخورد دو عمودمنصف را O بنامید (A, B, C هم خط نیستند، پس دو عمودمنصف موازی نیستند و یکدیگر را قطع می‌کنند).  $OA = OB = OC$ .
۴. پرگار را با دهانه OA روی O بگذارید و دایره را رسم کنید؛ از A, B, C می‌گذرد.

۱۷. سه نقطه دلخواه در یک صفحه داده شده است. آیا همواره می‌توان نقطه چهارمی در همان صفحه پیدا کرد که فاصله آن از سه نقطه داده شده یکسان باشد؟ اگر پاسخ خیر است شرطی به مسئله اضافه کنید که همیشه آن نقطه چهارم وجود داشته باشد.

نقطه‌های  $A, B, C$ . نقطه‌ای که از آن‌ها به یک فاصله است، روی عمودمنصف  $AB$  و عمودمنصف  $BC$  قرار دارد (مسئله ۸).

**پاسخ: خیر.** اگر  $A, B, C$  روی یک خط باشند (مثل  $(0,0)$ ،  $(1,1)$ ،  $(3,3)$ )،  $AB$  و  $BC$  روی یک خطاند و عمودمنصف‌هایشان هر دو بر آن خط عمودند، پس موازی‌اند و (چون وسط‌ها متفاوت‌اند) هم‌دیگر را قطع نمی‌کنند؛ نقطه چهارم وجود ندارد.

**شرط:** سه نقطه روی یک خط راست نباشند. آنگاه  $AB$  و  $BC$  موازی نیستند، پس عمودمنصف‌هایشان موازی نیستند و یک نقطه  $O$  مشترک دارند که  $OA = OB = OC$ .

۱۸. شرکت مخابرات یک دکل مخابراتی را برای آنتن‌دهی موبایل ساکنین سه روستای نزدیک به هم در نظر گرفته است. شرکت مخابرات باید این دکل را در کجا نصب کند؟

هدف طبیعی: دکل از سه روستا به یک فاصله باشد تا هر سه آنتن‌دهی یکسان داشته باشند. اگر روستاها  $A, B, C$  باشند (روی یک خط نیستند)، دکل باید در نقطه  $O$  نصب شود که محل برخورد عمودمنصف‌های  $AB$  و  $BC$  است (مسئله‌های ۸ و ۱۶-۱۷؛  $OA = OB = OC$  و دکل مرکز دایره‌ای است که از سه روستا می‌گذرد. نکته: چون صورت مسئله شرط بهینه بودن دیگری (مثل کمینه کردن مجموع فاصله‌ها) نمی‌گوید، این پاسخ بر پایه فاصله برابر از سه روستاست.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۱۹. تفاوت دو مسئله زیر را مشخص کنید.

**مسئله اول.** ثابت کنید اگر در یک مثلث، طول میانه وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

**مسئله دوم.** ثابت کنید در همه مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول میانه‌ای که از زاویه قائمه رسم می‌شود، نصف طول وتر است.

**مسئله دوم** می‌گوید: «اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، آنگاه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.» **مسئله اول** برعکس آن است: «اگر میانه وارد بر یک ضلع نصف همان ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است (زاویه رأس مقابل آن ضلع قائمه)». یعنی فرض یکی، حکم دیگری است (هر کدام عکس دیگری است)؛ و اثبات هر کدام اثبات دیگری نیست.

مسئله

صفحه ۱۰۶

۶۴

**۲۰. فاطمه و مژگان دو مسئله تمرین قبل را به صورت زیر حل کرده‌اند. دو راه حل زیر را با جزئیات کامل شرح دهید.**

| راه حل فاطمه برای مسئله اول :                                                                                                                                                                                                                                                         | راه حل مژگان برای مسئله دوم :                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| فرض کنید در مثلث $ABC$ طول میانه $AM$ نصف ضلع $BC$ باشد. بنابراین دو مثلث $ABM$ و $ACM$ متساوی الساقین هستند؛ پس در دو مثلث $ABM$ و $ACM$ اندازه زاویه‌های پای ساق برابرند. از طرفی مجموع زاویه‌های مثلث $ABC$ برابر $180^\circ$ است. پس می‌توان نتیجه گرفت که زاویه $BAC$ قائمه است. | فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه $ABC$ عمود منصف ضلع $AB$ و وتر $BC$ یکدیگر را در نقطه $M$ قطع کرده‌اند. پس مثلث $AMB$ متساوی الساقین است. چون مجموع دو زاویه $B$ و $C$ برابر $90^\circ$ و مجموع دو زاویه $BAM$ و $CAM$ نیز برابر $90^\circ$ است، پس دو زاویه $CAM$ و $C$ برابرند و در نتیجه میانه $AM$ نصف وتر $BC$ است. |

**راه حل فاطمه (مسئله اول)** — درست: در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  نصف  $BC$  است، پس  $AM = BM = CM$ . دو مثلث  $ABM$  و  $ACM$  متساوی الساقین‌اند؛ زاویه‌های پای ساق برابرند:  $\angle B = \angle BAM$  و  $\angle C = \angle CAM$ . مجموع زاویه‌های  $ABC$ :  $\angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ$ . چون  $\angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = \angle B + \angle C$ ، پس  $2\angle BAC = 180^\circ$  و  $\angle BAC = 90^\circ$ .

**راه حل مژگان (مسئله دوم)** — درست:  $ABC$  در  $A$  قائمه است. عمود منصف  $AB$  وتر  $BC$  را در  $M$  قطع می‌کند  $\angle BAM = \angle B \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \angle CAM = \angle C \Rightarrow MA = MC$ . پس  $MA = MB = MC$ :  $M$  وسط  $BC$  است و  $AM$  میانه با  $AM = BC/2$ .  
هر دو راه حل درست‌اند و با دو ایده مکمل (زاویه‌های پایه دو مثلث متساوی الساقین) نوشته شده‌اند.

۲۱. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

|                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| نقطه $M$ از دو ضلع زاویه $A$ فاصله یکسان دارد؛ یعنی اگر دو عمود $MH$ و $MK$ را بر ضلع‌های زاویه $A$ وارد کنیم، آنگاه $MH = MK$ . در این صورت دو مثلث $AMH$ و $AMK$ هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس $AM$ نیم‌ساز زاویه $A$ است. | نقطه دلخواه $D$ را روی نیم‌ساز زاویه $A$ انتخاب می‌کنیم. از $D$ دو عمود $DH$ و $DK$ را بر ضلع‌های زاویه $A$ رسم می‌کنیم. دو مثلث $AHD$ و $AKD$ هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $DH = DK$ . |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**جعبه سمت راست:** فرض:  $D$  روی نیم‌ساز  $\angle A$  است؛  $DH \perp AB$  و  $DK \perp AC$  ( $H, K$  روی ضلع‌ها). مثلث‌های  $AHD$  و  $AKD$  قائم‌الزاویه‌اند ( $\angle H = \angle K = 90^\circ$ )، وترشان  $AD$  مشترک است و  $\angle HAD = \angle KAD$  (نیم‌ساز)  $\Rightarrow$  (وتر و زاویه حاده / ضز با زاویه سوم) هم‌نهشت‌اند. پس  $DH = DK$ .

**جعبه سمت چپ:** فرض:  $MH = MK$  (فاصله‌های  $M$  از دو ضلع). مثلث‌های  $AMH$  و  $AMK$  قائم‌الزاویه‌اند؛ وتر  $AM$  مشترک و  $MH = MK \Rightarrow$  (وتر و یک ضلع) هم‌نهشت‌اند. پس  $\angle HAM = \angle KAM$ ؛  $AM$  نیم‌ساز  $\angle A$  است.

**تفاوت:** اولی از «روی نیم‌ساز بودن» به «فاصله برابر از دو ضلع» می‌رسد، دومی برعکس.

**نتیجه:** هر نقطه دلخواه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است؛ و برعکس، نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیم‌ساز آن زاویه است.

۲۲. در مستطیل  $ABCD$ ، نقطه  $M$  وسط ضلع  $CD$  است. نقطه  $K$  روی ضلع  $BC$  چنان قرار دارد که  $KM$  نیم‌ساز زاویه  $AKC$  است. ثابت کنید  $AM$  نیم‌ساز زاویه  $KAD$  است.

۱.  $M$  روی نیم‌ساز  $\angle AKC$  است، پس (مسئله ۲۱) از دو ضلع  $KA$  و  $KC$  به یک فاصله است. فاصله  $M$  از  $KC$  (خط  $BC$ ) برابر  $MC$  است، چون  $MC \perp BC$  (زاویه مستطیل).
۲.  $M$  وسط  $CD$ :  $MC = MD$ ؛  $MD \perp AD$ ، پس فاصله  $M$  از  $AD$  برابر  $MD$  است.
۳. پس فاصله  $M$  از  $KA = MC = MD = KA$ ؛ یعنی  $M$  از دو ضلع زاویه  $KAD$  به یک فاصله است و درون آن زاویه است. طبق مسئله ۲۱ (عکس)،  $M$  روی نیم‌ساز  $\angle KAD$  قرار دارد، یعنی  $AM$  نیم‌ساز  $\angle KAD$  است.

۲۳. در چهارضلعی محدب ABCD قطر AC نیمساز زاویه A است. اگر  $AB = 4$ ،  $AD = 5$  و مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آنگاه مساحت چهارضلعی ABCD چقدر است؟

۱. C روی نیمساز  $\angle A$  است  $\Rightarrow$  فاصله C از AB و از AD برابر است؛ آن را h می‌نامیم (مسئله ۲۱).

۲. مساحت  $ABC = \frac{1}{2} \times AB \times h = \frac{1}{2} \times 4 \times h = 2h = 12 \Rightarrow h = 6$ .

۳. مساحت  $ACD = \frac{1}{2} \times AD \times h = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$ .

۴. مساحت  $ABCD = 12 + 15 = 27$ .

پاسخ: ۲۷.

۲۴. الف) ثابت کنید در دو مثلث هم‌نهشت ارتفاع‌های نظیر برابرند.  
ب) دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند؛ همچنین عمودمنصف‌های دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطه N قطع کرده‌اند. اگر نقطه N درون زاویه AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیمساز زاویه AMC است.

الف) دو مثلث هم‌نهشت  $ABC \cong A'B'C'$ ، ارتفاع‌های نظیر AH و  $A'H'$  (روی BC و  $B'C'$ ). دو مثلث مساحت برابر دارند و  $BC = B'C'$ . پس  $AH = A'H' \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H'$  (راه دیگر: مثلث‌های قائم‌الزاویه ABH و  $A'B'H'$  وتر  $AB = A'B'$  و زاویه  $B = B'$  دارند  $\Rightarrow$  هم‌نهشت  $\Rightarrow AH = A'H'$ ).

ب) N روی عمودمنصف AD:  $NA = ND$ ؛ و روی عمودمنصف BC:  $NB = NC$  (مسئله ۸).

۱. مثلث‌های NAB و NDC:  $NA = ND$ ،  $NB = NC$ ،  $AB = DC$  (فرض)  $\Rightarrow$  (ض ض ض)  $\triangle NAB \cong \triangle NDC$ .

۲. ارتفاع‌های نظیر این دو مثلث (از N بر AB و بر DC) برابرند (الف). پس N از دو خط AB و CD به یک فاصله است.

۳. ضلع‌های زاویه AMC روی دو خط AB و CD قرار دارند و N درون زاویه است؛ طبق مسئله ۲۱ (عکس) N روی نیمساز  $\angle AMC$  است.

پس MN نیمساز  $\angle AMC$  است.